N. PERELOMOVA. M. TAGUIEVA

PROBLEMAS DE CRISTALOFISICA

EDITORIAL MIR•MOSCÚ

ИЗДАТЕЛЬСТВО МИР

Н. ПЕРЕЛОМОВА
М. ТАГИЕВА

ЗАДАЧНИК ПО КРИСТАЛЛОФИЗИКЕ

Издательство «Наука»

N. PERELÓMOVA, M. TAGUÍEVA

PROBLEMAS DE CRISTALOFÍSICA

EDITORIAL MIR 1975

Traducido del ruso por V. Nasónov

Impreso en la URSS 1975

© Traducción al español. Editorial Mir. 1975

(На испанском языке)

PREFACIO

Los últimos años se caracterizan por un rápido desarrollo de cristalofísica y una utilización cada vez mayor de monocristales en diferentes ramas de la técnica.

Las propiedades anisótropas (piroeléctricas, piezoeléctricas, electroópticas, etc.) de cristales, que antes ofrecían interés sólo a un círculo estrecho de especialistas, hoy día se utilizan ampliamente en las novísimas ramas de radiotécnica, electrotécnica, óptica y acústica. Debido a ello ha surgido la necesidad de crear una metodología de enseñar la cristalografía y cristalofísica a los futuros ingenieros.

Un amplio curso de cristalografía y cristalofísica técnicas para las especialidades de ingeniería fue elaborado por primera vez en la Unión Soviética en 1963 en la cátedra de cristalografía de la facultad de materiales y aparatos semiconductores del Instituto de Acero y Aleaciones de Moscú. La recopilación de problemas que ofrecemos, es una parte del trabajo metodológico de dicha cátedra, relacionado con la creación de este curso. El presente trabajo incluye los problemas que durante varios años pasaron la prueba en las clases prácticas de los grupos de estudio o formaron parte de las tareas de casa de los estudiantes. Además de las autoras de este libro daban clases M. Shaskólskaya, G. Malájov, S. Górbach, N. Filippovski y otros profesores de la cátedra de cristalografía quienes han hecho también cierto aporte a la precisión de algunas definiciones y a la selección de los problemas compuestos por las autoras.

Las autoras expresan su profunda gratitud a la catedrática M. Shaskólskaya, cuyos vastos conocimientos y gran experiencia pedagógica han constituido la base para escribir este libro. A M. Shaskólskaya le pertenecen las ideas de muchos problemas.

Las autoras señalan la gran aportación, hecha a este trabajo por Yu. Sirotin, docente de la Universidad de Moscú. Sus lecciones prácticas en la cátedra de cristalografía del Instituto de Acero y Aleaciones sirvieron de estímulo decisivo para escribir este libro. Las autoras están agradecidas a I. Rez, doctor en Ciencias Químicas, por una serie de observaciones y consejos útiles.

Los problemas están compuestos a base de los manuales, monografías especiales y artículos de revistas. Para preparar el manuscrito han sido utilizados los libros siguientes: J. Nye, «Propiedades físicas de cristales»; A. Shúbnikov, E. Flint y G. Bokia, «Fundamentos de cristalografía»; I. Zhóludiev, «Física de dieléctricos cristalinos»; W. Mason, «Cristales piezoeléctricos y su utilización en ultraacústica» y otros. Doce problemas del párrafo 4 que pertenecen al tema de «Propiedades ópticas de cristales», se han tomado del libro de S. Chetverikov «Metodología de investigación cristalooptica de secciones delgadas». La mayoría de problemas ha sido compuesta por las autoras: tres cuartas partes por N. Perelómova y una parte por M. Taguíeva, y se publican por primera vez. Las autoras estarán muy reconocidas al lector por cualquier observación o sugerencia respecto del libro.

N. Perelómova,
M. Taguíeva

§ 1. EXPRESIÓN MATRICIAL DE LAS OPERACIONES SIMÉTRICAS Y CLASES DE SIMETRÍA

Las propiedades específicas de cristales están vinculadas a la simetría y la anisotropía del medio cristalino.

La simetría del espacio cristalino se define como propiedad de dicho espacio de coincidir consigo mismo mediante ciertas transformaciones llamadas operaciones de simetría.

Se distinguen dos tipos de tales transformaciones: las operaciones de simetría de primera especie (giros) y las operaciones de simetría de segunda especie (reflexiones especulares).

Las operaciones de primera especie transforman el sistema de coordenadas derecho, enlazado con el cristal, en el derecho; el izquierdo, en el izquierdo, mientras que las operaciones de segunda especie conducen a la sustitución del sistema de coordenadas derecho en el izquierdo (y viceversa).

Las posibles combinaciones de las operaciones simétricas de poliedros cristalinos forman 32 grupos puntuales o 32 clases de simetría.

Estos grupos se llaman puntuales, porque las transformaciones simétricas que forman parte de ellos dejan inmóvil, por los menos, un punto del espacio cristalino (origen de coordenadas).

En la tabla 1 (véase al final del libro) se dan los símbolos de 32 clases de simetría, y en la tabla 2, los de elementos de simetría en proyección estereográfica.

Sistemas de coordenadas cristalográficos y cristalofísicos estandartizados. Para la descripción unívoca de las direcciones y de los planos de cristales se utilizan los ejes coordenados cristalográficos X, Y, Z; las reglas estandartizadas de su elección se dan en la tabla 3. Para describir las propiedades físicas de cristales, igual que para representar analíticamente sus grupos puntuales de simetría, en los cristales se eligen los ejes cristalofísicos ortogonales X_1, X_2, X_3; las reglas estandartizadas de orientar estos ejes respecto de los cristalográficos se dan en las tablas 4 y 5. Los sistemas de coordenadas cristalográficos y cristalofísicos siempre se eligen derechos y los ángulos comprendidos entre las direcciones positivas de los ejes cristalográficos y cristalofísicos

correspondientes, menores de 90°. A la dirección positiva de un eje cristalográfico le corresponde una dirección positiva del eje cristalofísico respectivo. Para las *singonías* o sistemas cristalinos cúbica, tetragonal y rómbica las direcciones de los ejes en los sistemas de coordenadas cristalofísico y cristalográfico coinciden.

Expresión matricial de las operaciones de simetría. Las operaciones de simetría se pueden describir analíticamente como las operaciones de transformación de los ejes de coordenadas. Tomemos el punto de espacio que queda inmóvil en todas las operaciones simétricas del grupo puntual por origen del sistema de coordenadas cristalofísico ortogonal X_1, X_2, X_3. Toda operación simétrica de clase cristalográfica colocará los ejes X_1, X_2, X_3 en nuevas posiciones X_1', X_2', X_3' (figs. 1.1—1.3).

Los ángulos entre los ejes nuevos (X_1', X_2', X_3') y viejos (X_1, X_2, X_3) se determinan por la tabla de cosenos directores:

Ejes	X_1	X_2	X_3
X_1'	C_{11}	C_{12}	C_{13}
X_2'	C_{21}	C_{22}	C_{23}
X_3'	C_{31}	C_{32}	C_{33}

El *primer índice del símbolo* C_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) *se refiere* a los ejes nuevos; el segundo, a los viejos. Por ejemplo, C_{23} es el coseno del ángulo comprendido entre el eje X_2' y el eje X_3.

Así pues, a toda transformación simétrica se le puede poner en correspondencia su matriz de cosenos directores C_{ij}, o sea, escribirla en expresión matricial. El ángulo del giro se considera positivo, si, observando desde el extremo positivo del eje en la dirección del origen de coordenadas, el giro a partir del eje viejo hacia el nuevo se realiza en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

Nueve coeficientes C_{ij} no son independientes. Debido a que cada fila de la matriz (C_{ij}) representa en sí los cosenos directores del eje rayado de coordenadas respecto de los ejes no rayados X_1, X_2, X_3, en este caso

$$C_{ik}C_{jk} = 1, \text{ siendo } i = j. \qquad (1.1)$$

Puesto que cada par de filas de la matriz (C_{ij}) son cosenos directores de dos direcciones perpendiculares entre sí, por lo tanto

$$C_{ik}C_{jk}=0, \text{ si } i\neq j \qquad (1.2)$$

Las ecuaciones (1.1) y (1.2) se llaman correlaciones de ortogonalidad y pueden escribirse en la forma abreviada siguiente:

$$C_{ik}C_{jk}=\delta_{ij}.$$

donde δ_{ij} es símbolo de Kronecker, determinado así:

$$\delta_{ij}=\begin{cases} 1, \text{ cuando } i=j, \\ 0, \text{ cuando } i\neq j. \end{cases}$$

Para las operaciones de primera especie, con las cuales el sistema de coordenadas derecho queda derecho, el izquierdo, izquierdo, el determinante de la matriz de los cosenos directores $|C_{ij}|$ es igual a $+1$. Para las operaciones de segunda especie $|C_{ij}|=-1$.

Grupos (clases) de simetría cristalográficos. El conjunto de todas las operaciones simétricas posibles no equivalentes, mediante las cuales la figura puede transformarse en sí misma, forma un grupo matemático, es decir, está subordinada a los siguientes postulados:

1. El producto de dos operaciones simétricas A y B, que forman parte del grupo de simetría, es equivalente a la operación simétrica C, que pertenece al mismo grupo: $AB=C$.

Al producto de transformaciones simétricas respecto del sistema de ejes enlazados rígidamente con el cristal le corresponde el producto de las matrices correspondientes (en el sentido de una multiplicación matricial corriente).

El resultado de dos transformaciones simétricas sucesivas puede depender del orden en que se ejecutan las operaciones, por eso es necesario seguir el orden en que se escriben las matrices correspondientes.

2. La multiplicación de operaciones se realiza de modo asociativo:

$$(AB)\,C=A\,(BC).$$

3. Entre las operaciones de simetría figura tal operación de identificación E, con la cual $AE=EA=A$ para cualquier operación del grupo. La operación E se llama en este caso unitaria.

Para las transformaciones simétricas, el giro de 360° alrededor de una dirección arbitraria en el cristal, que es el eje de simetría de primer orden, es la operación unitaria.

4. Para cada operación A existe otra inversa A^{-1}, que forma parte del grupo de simetría y satisface la correlación

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Por ejemplo, si A es el giro en el ángulo φ en el sentido de las agujas del reloj, en este caso A^{-1} es el mismo giro, pero en la dirección contraria.

El conjunto de matrices (C_{ij}), construido para todas las operaciones simétricas no equivalentes*), que forman parte de un grupo puntual concreto de simetría, se llama expresión matricial de este grupo y el número de operaciones no equivalentes que integran el grupo de simetría se llama el orden de grupo. Cierto sistema de operaciones de simetría, que forman parte del grupo dado, se llama el sistema de generatrices (generadores), si estas operaciones, al ser multiplicadas por todos los modos, nos dan todas las operaciones integrantes de este grupo. Hay que tener en cuenta que los conceptos de «elemento de simetría» y de «operación de simetría» no son idénticos.

Elemento de simetría es el grupo que se determina por una operación, o sea, el grupo que contiene todos los grados no equivalentes entre sí de la operación dada. Por ejemplo, el eje de tercer orden es el grupo que contiene tres operaciones: el giro de 120, el giro de 240 y el giro de 360° (operación de identificación).

Ejemplos de solución de los problemas

1.1. Escribir la expresión matricial de todas las operaciones de simetría, que forman parte del grupo puntual *mmm*.

Solución. El grupo puntual de simetría *mmm* comprende ocho operaciones de simetría: tres de reflexión en los planos coordenados de simetría, tres giros de 180° alrededor de los ejes coordenados, también el giro de 360° e inversión en el punto 0. El sistema de ejes coordenados, obtenido del inicial

*) Las operaciones simétricas se consideran equivalentes, si dan lugar al mismo reagrupamiento de las partes de una figura. Por ejemplo, son equivalentes la operación del giro de 60° en el sentido de las agujas del reloj y las operaciones de giro de 300° en el sentido contrario.

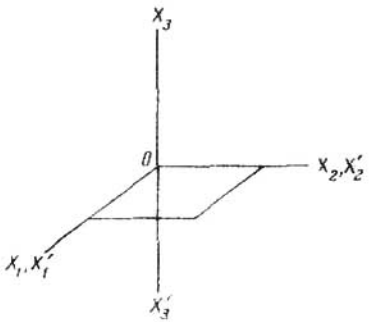


Fig. 1.1. Transformación de los ejes cristalofísicos de coordenadas por el plano de simetría perpendicular al eje X_3.

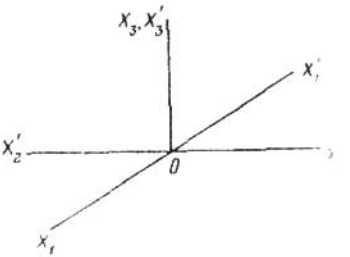


Fig. 1.2. Transformación de los ejes cristalofísicos de coordenadas por el eje de simetría de segundo orden que coincide con el eje X_3.

mediante la acción de las operaciones de simetría, designémoslo con X_1', X_2', X_3'.

La expresión matricial de la operación de reflexión en el plano X_1X_2 (o, en forma abreviada, $m \perp X_3$) (fig. 1.1) se escribirá en la forma de

$$C_{ij}(m \perp X_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Análogamente, para $(m \perp X_2)$ y $(m \perp X_1)$ obtendremos las expresiones

$$C_{ij}(m \perp X_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_{ij}(m \perp X_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El determinante $|C_{ij}(m \perp X_i)|$ es igual a -1, por lo tanto, la operación de reflexión en el plano de simetría es la operación de segunda especie.

La expresión matricial de la operación del giro de 180° alrededor del eje X_3 (X_3, 180°; fig. 1.2) se escribirá:

$$C_{ij}(X_3,\ 180°) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Análogamente, para (X_2, 180°) y (X_1, 180°) tendremos:

$$C_{ij}(X_2,\ 180°) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C_{ij}(X_1,\ 180°) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriz del giro de 360° alrededor de cualquier dirección en el cristal, por ejemplo, el eje X_3 (X_3, 360°), se escribe así:

$$C_{ij}(X_3,\ 360°) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El determinante $| C_{ii}(X_j, 180°) |$, como el determinante $| C_{ij}(X_i, 360°) |$, es igual a 1, es decir, las operaciones simétricas del giro de 180 y 360° son operaciones de primera especie.

Y, por fin, una operación de inversión ($\bar{1}$) (fig. 1.3) se representará en forma de la expresión matricial siguiente:

$$C_{ij}(\bar{1}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$| C_{ij}(\bar{1}) | = -1$, es decir, ésta es la operación de segunda especie.

1.2. Hallar la expresión matricial y el orden del grupo de simetría de la modificación de baja temperatura del cuarzo*).

---

*) Todos los datos referentes a los cristales, necesarios para la solución de problemas, se dan en la tabla 12.

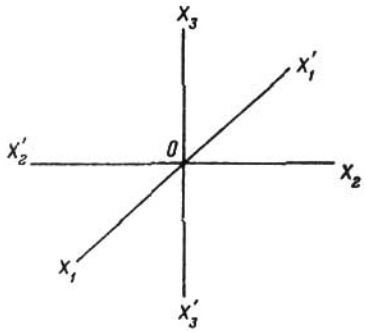


Fig. 1.3. Transformación de los ejes cristalofísicos de coordenadas por el centro de inversión.

Solución. Según las reglas de elegir los ejes cristalofísicos (véase las tablas 4 y 5) los ejes X_1, X_2, X_3 del grupo puntual de simetría 32 se orientan según demuestra la fig. 1.4.

Las matrices correspondientes a las operaciones del giro alrededor del eje X_3 a 120, 240 y 360° (los giros a estos ángulos los contiene el eje de simetría de tercer orden), se escri-

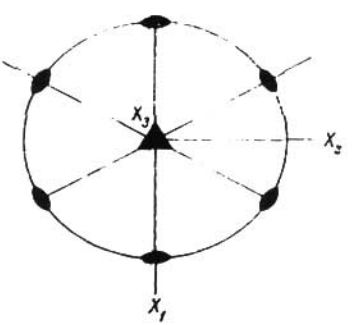


Fig. 1.4.

birán así:

$$C_{ij}(X_3,\ 120°) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_{ij}(X_3,\ 240°) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_{ij}(X_3,\ 360°) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las matrices de las operaciones de giro de 180° alrededor de los ejes de segundo orden tienen la forma

$$C_{ij}(2 \parallel X_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

C_{ij}(2 bajo el ángulo de 30° al X_1) =

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

C_{ij}(2 bajo el ángulo de 30° al X_2) =

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Seis matrices no equivalentes (C_{ij}), correspondientes a diferentes operaciones de simetría que forman parte del

grupo 32, constituyen la expresión matricial de este grupo de simetría. El orden del grupo es igual a seis.

1.3. El conocido teorema de Euler se expresa así: la resultante de dos ejes intersecantes de simetría es el tercer eje de simetría, que pasa por el punto de intersección de los dos primeros. Valiéndose de la expresión matricial de los elementos de simetría, demostrar el teorema de Euler en el ejemplo de la clase 422.

Solución. Tomemos como elementos iniciales de simetría el eje de cuarto orden y un eje de segundo orden, que es perpendicular a aquél. Según las reglas de elección del sistema cristalofísico de coordenadas, dirigimos el eje X_3 por el eje de cuarto orden, el eje X_1, por el eje de segundo orden, el eje X_2 lo elegimos, partiendo de la condición de ortogonalidad del sistema de coordenadas.

Escribamos la matriz que corresponde al giro de 90° alrededor del eje X_3:

$$C_{ij}(X_3,\ 90°) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz que corresponde al giro de 180° alrededor del eje X_1, se escribirá:

$$C_{ij}(X_1,\ 180°) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Supongamos que $(C_{ij}\ (X_3,\ 90°)) = A$, $(C_{ij}\ (X_1,\ 180°)) = B$. Utilizando la primera propiedad del grupo $(AB = C)$, hallamos la expresión matricial del elemento C:

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es evidente que el elemento C es la operación simétrica que transforma el eje X_1 en el $-X_2$, el X_2 en el $-X_1$ y el eje X_3 en el $-X_3$.

Tal elemento de simetría es el eje de segundo orden que se sitúa bajo el ángulo de 45° con respecto a los ejes X_1 y X_2 y pasa perpendicularmente al eje X_3 (fig. 1.5). Análogamente, tomando por turno los productos de todas las

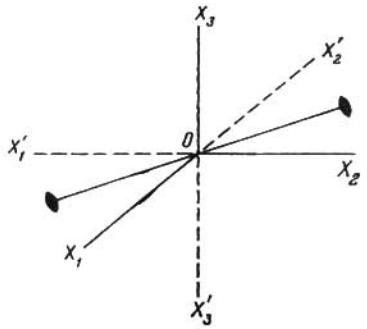


Fig. 1.5. Transformación de los ejes de coordenadas por el eje de simetría de segundo orden que forma el ángulo de 45° con los ejes de coordenadas X_1 y X_2.

matrices que corresponden a los giros de 90, 180, 270 y 360° alrededor del eje X_3, y la matriz, correspondiente al giro de 180° en torno al eje X_1 ($2 \parallel X_1$), resulta, que cuatro ejes 2 se sitúan perpendicularmente al eje 4.

Problemas

1.4. Escribir la matriz de transformación del sistema de coordenadas por el plano de simetría, que pasa por el eje X_3 y se sitúa bajo un ángulo arbitrario φ al eje X_1.

1.5. Hallar la matriz de transformación del sistema de coordenadas por el eje de simetría de segundo orden, que se encuentra en el plano coordenado X_1X_2 bajo cualquier ángulo φ respecto del eje X_2.

1.6. El cristal se hace girar a 90° con la reflexión subsiguiente en el centro de inversión, luego a 180° alrededor de la dirección que es perpendicular al eje del primer giro. Hallar la expresión matricial de la operación de simetría que dé el mismo resultado.

1.7. El cristal se hace girar a 120°, luego lo reflejan en el centro de inversión. Hallar la expresión matricial de la operación de simetría, que dé el mismo resultado. ¿Al grupo de qué elemento de simetría pertenece esta operación?

1.8. Utilizando la expresión matricial de elementos de simetría, encontrar tal operación de simetría, cuya acción dé

el mismo resultado que la acción de dos ejes de segundo orden, que se intersecan bajo el ángulo de 90°.

1.9. Hallar la expresión matricial de la operación de simetría, cuya acción dé el mismo resultado, que el de la acción de los ejes de segundo orden, situados bajo el ángulo de 60°. ¿Al grupo de qué elemento de simetría pertenece esta operación?

1.10. Hallar la expresión matricial y el orden del grupo puntual de simetría del dihidrofosfato de potasio (KDP) para la selección estandartizada y no estandartizada ($\bar{4}m2$) pe los ejes cristalofísicos de coordenadas.

1.11. Hallar la expresión matricial del grupo puntual de simetría 622.

1.12. Hallar la expresión matricial y el orden del grupo $\bar{6}$.

1.13. Hallar la expresión matricial del grupo $2/m$ en los índices $2 \parallel X_2$ y $2 \parallel X_3$.

1.14. Utilizando la expresión matricial de operaciones de simetría, comprobar la exactitud del teorema de Euler en el ejemplo del grupo puntual 222.

1.15. Utilizando la expresión matricial de las operaciones de simetría, comprobar la exactitud del teorema: la combinación del eje de orden par y el plano perpendicular al mismo nos da el centro de simetría.

1.16. Convencerse de la exactitud del teorema de Euler, tomando como ejemplo los ejes de segundo orden situados bajo el ángulo de 45° uno a otro.

1.17. ¿Qué orden tienen los siguientes grupos de simetría: mm, 222, $4mm$, 422?

1.18. Escribir el sistema de generadores para el grupo $4/mmm$.

1.19. Probar, si se cumplen todos los axiomas de grupos, tomando como ejemplo el grupo puntual de simetría $2/m$.

§ 2. PRINCIPIO DE NEUMANN. GRUPOS PUNTUALES LÍMITES DE SIMETRÍA. PRINCIPIO DE CURIE

Principio de Neumann. La simetría de las propiedades físicas de un cristal*) está enlazada con su grupo puntual de simetría. Esta relación se establece por la ley fundamental

*) La simetría de la propiedad física de cristal se entiende como simetría de superficie tensorial, mediante la cual se describe dicha propiedad.

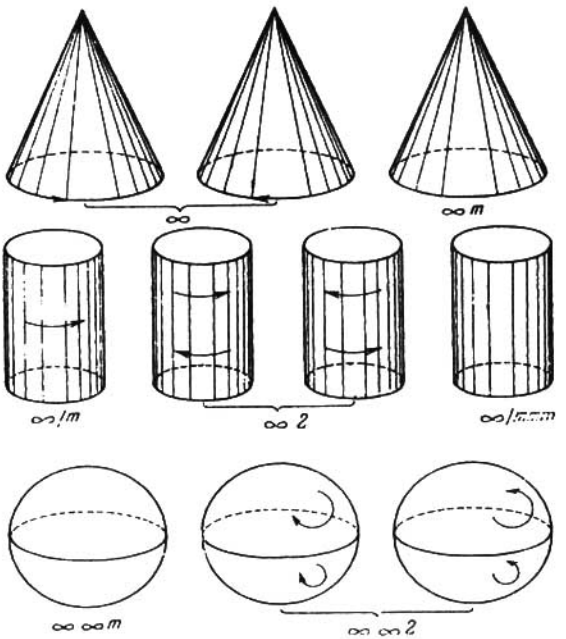


Fig. 2.1. Figuras que ilustran los grupos límites de simetría.

de cristalofísica, conocida bajo el nombre del *principio de Neumann.*

El grupo de simetría de cualquier propiedad física del cristal debe incluir un grupo puntual de simetría del cristal.

Esta ley afirma que el grupo de simetría de una propiedad física del cristal, determinado independientemente de la simetría de su forma, puede ser más alto que el grupo puntual de la simetría del cristal.

Según el principio de Neumann, la propiedad física del cristal debe tener todos los elementos de simetría que posee este cristal. Entre los grupos de simetría, que describen las propiedades físicas de cristales, hay grupos que contienen los ejes de orden infinito. Tales grupos de simetría se llaman límites (grupos de Curie).

Grupos puntuales límites de simetría. Es fácil recordar los grupos límites de simetría según figuras geométricas (fig. 2.1.) Utilizando los grupos de simetría límites podemos caracterizar también la simetría de las texturas que son agregados policristalinos, en los cuales la disposición de cristalitos es ordenada. La simetría de los piezoeléctricos artificiales: cerámica de titanato de bario y la textura de la sal de Seignette, se caracteriza por los grupos ∞m y $\infty 2$, respectivamente.

Fig. 2.2. Representación esquemática de la intensidad de los campos eléctrico y magnético.

Algunos grupos límites de simetría son útiles para describir la simetría de agentes físicos. Por ejemplo, la simetría del campo eléctrico homogéneo continuo se puede caracterizar con el grupo ∞m; la del campo magnético homogéneo continuo, con el grupo ∞/m; la tensión mecánica de tracción o de compresión uniaxial, con el grupo de simetría ∞/mmm; la tensión mecánica del desplazamiento puro con el grupo mmm; la compresión en todos los sentidos con el grupo $\infty\infty m$. El fenómeno del giro del plano de polarización puede ser caracterizado con el grupo límite $\infty\infty$.

En correspondencia con la diferencia en simetría, la intensidad de los campos eléctrico y magnético homogéneos ha de ser representada gráficamente, como lo demuestra la fig. 2.2.

Del principio de Neumann se desprende también que un cristal puede tener propiedades físicas determinadas solamente en el caso de que su grupo puntual de simetría es un subgrupo del grupo puntual de la simetría de la propiedad física examinada. Por ejemplo, la polarización eléctrica espontánea y las propiedades piroeléctricas sólo pueden tenerlas los cristales, cuya simetría está subordinada a la simetría del vector polar, es decir, los cristales que pertenecen a los grupos puntuales: 1, 2, 3, 4, 6, m, mm, $3m$, $4mm$, $6mm$.

Principio de Curie. Si en el cristal actúa un agente físico que posee una simetría determinada, la simetría de este cristal situado en el campo de la acción del mismo varía y puede ser determinada por medio del principio de superposición de simetrías, llamado el *principio de Curie.*

El cristal que se encuentra bajo la acción de un agente exterior poseerá aquellos elementos de simetría que son comunes tanto para el cristal en ausencia del agente como para el agente en ausencia del cristal.

Para aclarar la simetría del fenómeno resultante tiene importancia no sólo la simetría de los fenómenos en interacción, sino también la disposición mutua de sus elementos de simetría. Para la solución de los problemas de este tipo es conveniente utilizar las proyecciones estereográficas de los *grupos puntuales de simetría de los cristales.*

Para ilustrar el principio de Curie es de interés examinar la cuestión de restricciones que impone la simetría de cristales a la posibilidad de existencia en ellos del efecto piroeléctrico, del efecto piezoeléctrico y del fenómeno de polarización *en el campo eléctrico exterior* (*véase* §§ 3, 4 y 6). Compongamos una tabla.

Efecto	Ecuación	Grupos mayores de simetría de cristales y de texturas antes de la acción del agente	Simetría del agente	Simetría de cristales que revelan el efecto
Efecto piroeléctrico	$P_i = \gamma_i \Delta T$	∞m	$\infty\infty m$	10 clases polares. El cristal mismo asegura la disimetría *), necesaria para la existencia *del vector P*
Efecto piezoeléctrico	$P_i = d_{ijk} t_{jk}$	$\infty 2$, ∞m, $\bar{4}3m$, $\bar{6}m2$	mmm	20 clases no centrosimétricas. La disimetría del cristal debe eliminar la centrosimetría del agente
Polarización *en el campo* exterior	$P_i = \varkappa_{ij} E_j$	$\infty\infty m$	∞m	32 grupos puntuales de simetría. La simetría polar necesaria se asegura por la disimetría del agente

*) Disimetría es la ausencia de todos los elementos de simetría.

Según demuestra la tabla, superponiendo diferentes campos físicos que poseen distinta simetría, la reacción del cristal resulta igual.

El cristal polarizado, según el principio de Neumann, debe tener la simetría de una de las 10 clases polares, ya que sólo estas clases tienen la dirección polar unitaria a lo largo de la cual se sitúa el vector **P**.

En los cristales se puede observar una polarización, si, como resultado de la superposición de la simetría del agente en la simetría del cristal, queda, según el principio de Curie, la simetría de una de las 10 clases polares; no importa, si esto se logre a costa de la simetría del cristal, siendo la más alta la simetría del agente (efecto piroeléctrico), o, al contrario, a costa de la simetría polar del agente, cuando se puede observar la polarización en el cristal de cualquier simetría e incluso en un cuerpo isótropo.

Ejemplos de solución de los problemas

2.1. Se conoce que los cristales de cuarzo son piezoeléctricos, es decir, se polarizan bajo la acción de tensiones mecánicas. Aplicando el principio de Curie y el principio de Neumann, contestar a las preguntas siguientes:

a) ¿Qué láminas de cuarzo orientadas, perpendiculares al eje 3 o al eje 2, hay que elegir en calidad de elementos sensibles de los captadores piezoeléctricos de presión uniaxial?

b) ¿Si se puede utilizar cristales de cuarzo como captadores de la presión hidrostática?

Solución. Los cristales de cuarzo pertenecen a la clase 32.

a) La polarización de cristales bajo la acción de una compresión uniaxial surge sólo al aparecer en el cristal una dirección unitaria que es simultáneamente una dirección polar*). En la clase 32 el eje de tercer orden es una dirección unitaria, pero no es dirección polar debido a la presencia de los ejes de segundo orden que son perpendiculares a este eje.

Actuando en el cristal una presión que posee el grupo de simetría ∞/mmm a lo largo del eje de tercer orden, lo que

*) Se llama la dirección unitaria (especial) tal dirección, que es imposible de repetir por los elementos de simetría del cristal. La dirección polar es la dirección en el cristal, dos extremos de la cual no se puede hacerlos coincidir por ningún elemento de simetría de la clase dada.

podemos escribir convencionalmente en la forma siguiente:

$$32 \bigcap_{\parallel 3} \infty/mmm,$$

donde $\bigcap$ es el símbolo que significa intersección (o producto) de los grupos; obtenemos que la simetría del cristal en este caso no varía:

$$32 \bigcap_{\parallel 3} \infty/mmm = 32.$$

Por consiguiente, comprimiendo una lámina de cuarzo cortada de modo que sus caras activas sean perpendiculares al eje 3 (sección delgada Z; véase la fig. 2.3), no obtenemos efecto de polarización.

Ahora comprimamos el cristal de cuarzo a lo largo de uno de los ejes 2:

$$32 \bigcap_{\parallel 2} \infty/mmm = 2.$$

En este caso, de todas las direcciones polares de cristal que se sitúan en el plano perpendicular al eje 3 se destacará una. Ahora resulta ser unitaria y polar; por lo tanto, el *vector de polarización piezoeléctrica* se situará a lo largo de ella.

Es evidente que para lograr el efecto piezoeléctrico mediante la compresión uniaxial es necesario cortar la lámina

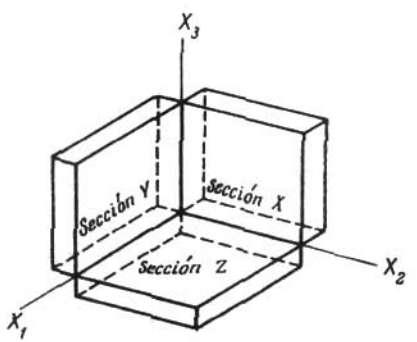


Fig. 2.3.

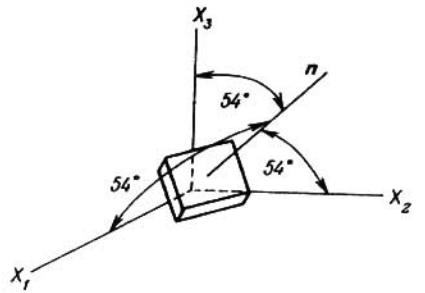


Fig. 2.4.

de cuarzo de tal modo que sus caras activas sean perpendiculares a uno de los ejes 2 (sección delgada X; véase la fig. 2.3).

b) Como captadores de la presión hidrostática, cuya simetría se caracteriza por el grupo $\infty\infty m$, pueden utilizarse sólo los cristales que poseen la dirección polar unitaria en ausencia del agente. Por eso, para estos fines los cristales de cuarzo no son aptos.

2.2. Para investigar las propiedades físicas de los cristales de sal de Seignette a la temperatura superior a 24° C, fueron preparadas las secciones delgadas X, Y, Z (véase la fig. 2.3) y sección L (véase la fig. 2.4). ¿Se polarizarán o no estas secciones bajo la acción de compresión uniaxial perpendicular a sus topes?

Solución. A la temperatura superior a 24° C los cristales de sal de Seignette pertenecen a la clase 222, para la cual todas las direcciones que se encuentran en los planos coordenados no son polares.

La compresión de secciones delgadas X, Y, y Z (véase la fig. 2.3) que es perpendicular a sus topes, significa que la tensión mecánica de simetría ∞/mmm actúa por turno a lo largo de las direcciones cristalográficas [100], [010] y [001]. Utilizando el principio de Curie, resulta que durante la acción de la tensión mecánica uniaxial a lo largo de las direcciones indicadas, la simetría del cristal no baja.

Por consiguiente, según el principio de Neumann, tales secciones no se pueden polarizar bajo la acción de la tensión

de compresión uniaxial aplicada perpendicularmente a sus topes.

Actuando la tensión de compresión en la sección delgada L, inclinada igualmente respecto a los ejes de simetría de segundo orden, la simetría del cristal baja hasta la clase 1; en el cristal aparece una dirección polar destacada que coincide con la dirección en que actúa la tensión a lo largo de la cual puede situarse el vector de polarización piezoeléctrica.

Tal sección se puede polarizar durante la compresión que actúa perpendicularmente a sus caras activas, lo que se comprueba por los experimentos.

2.3. Una tensión uniaxial de tracción está aplicada a un cristal cúbico de simetría $m3m$. ¿Qué simetría tendrá el cristal, si la tensión se aplica a lo largo de las direcciones: a) [001], b) [111], c) [110], d) [hk0]?

Solución. a) Según la condición del problema, la tensión de tracción, cuya simetría es ∞/mmm, está aplicada al cristal de simetría $m3m$ a lo largo de la dirección [001] que coincide con el eje de cuarto orden. En este caso, interaccionan entre sí el campo de la tensión uniaxial de simetría ∞/mmm y el cristal de simetría $m3m$.

Suponiendo que todos los elementos de simetría de los fenómenos en interacción se intersecan en un punto y, aplicando el principio de superposición de simetría, obtenemos que el grupo de simetría del fenómeno resultante (en el caso dado la simetría del cristal) debe contener un eje de cuarto orden, cuatro planos que pasan por él, y un plano perpendicular al mismo, un centro de inversión y cuatro ejes de segundo orden. La simetría de cristal debe ser de $4/mmm$, es decir, tetragonal (fig. 2.5, *a* y *b*).

b) La tracción a lo largo de la dirección [111], que coincide con el eje de tercer orden, conduce al fenómeno de que el cristal conserva el eje de tercer orden, a lo largo del cual se efectúa la tracción, tres planos de simetría, un centro de inversión y tres ejes de segundo orden.

En otras palabras, con este método de superposición de la tensión obtenemos un cristal trigonal de simetría de un romboedro: $\bar{3}\ m$ (fig. 2.6, *a* y *b*).

c) Durante la tracción de un cristal cúbico, de simetría $m3m$, a lo largo de uno de los ejes de segundo orden en el cristal sólo queda el conjunto de elementos de simetría mmm, que es propio de los cristales rómbicos (fig. 2.7, *a* y *b*).

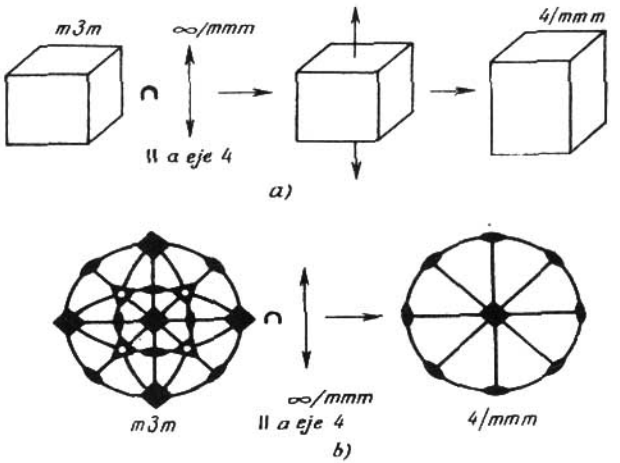

m3m
∞/mmm
4/mmm
∥ a eje 4
a)
m3m
∞/mmm
∥ a eje 4
4/mmm
b)

Fig. 2.5.

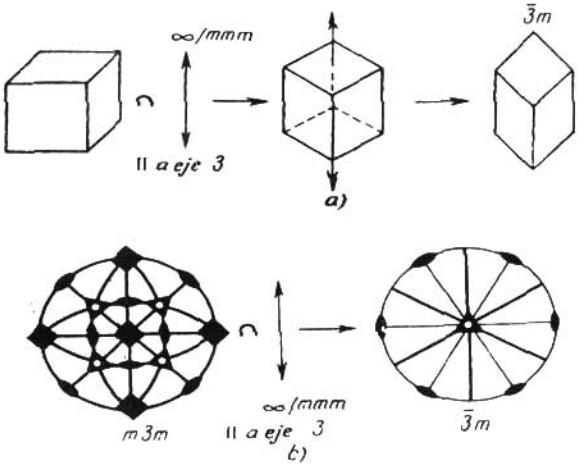

∞/mmm
3̄m
∥ a eje 3
a)
m3m
∞/mmm
∥ a eje 3
3̄m
b)

Fig. 2.6.

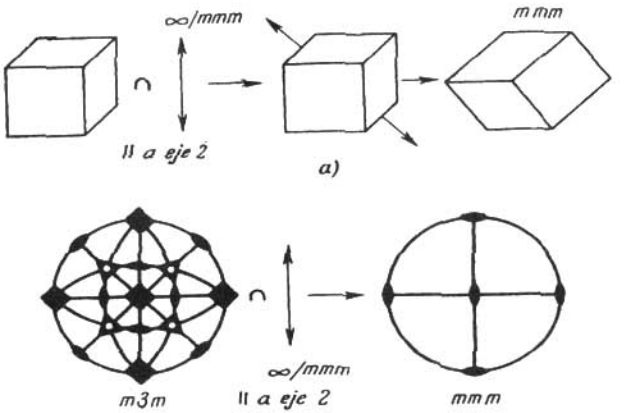

∞/mmm
mmm
∥ a eje 2
a)
m3m
∞/mmm
∥ a eje 2
mmm

Fig. 2.7.

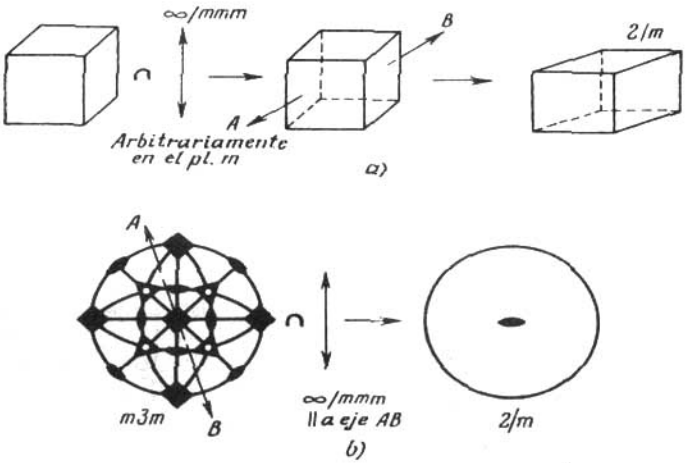

∞/mmm
B
2/m
A
Arbitrariamente
en el pl. m
a)
A
m3m
B
∞/mmm
∥ a eje AB
2/m
b)

Fig. 2.8.

d) Y, por fin, aplicando un esfuerzo de tracción en la dirección [*hk*0], es decir, de un modo arbitrario en uno de los planos de simetría (fig. 2.8, *a*), por ejemplo, en la dirección *AB*, obtenemos que, en este caso, el cristal tendrá la simetría 2/*m*, o sea, utilizando este método de superposición de tensiones, el cristal se hace monoclínico (fig. 2.8, *a* y *b*).

2.4. Una sección delgada *Z* está hecha de esfalerita (véase la fig. 2.3).

¿Se polarizará esta lámina o no, al ejercer su acción: a) la tensión uniaxial de compresión aplicada a sus caras activas; b) la tensión de desplazamiento puro que actúa en el plano de caras activas y se caracteriza con el grupo de simetría *mmm*?

Solución. a) La compresión de la sección delgada *Z* de esfalerita significa que la tensión mecánica uniaxial caracterizada con el grupo de simetría ∞/mmm actúa en el cristal de simetría $\bar{4}3m$ en la dirección [001]. Esto hace bajar la simetría del cristal hasta la clase $\bar{4}2m$. Puesto que en este caso las direcciones polares destacadas no aparecen, tampoco puede surgir la polarización piezoeléctrica.

b) La acción de la tensión de desplazamiento puro que se caracteriza con el grupo de simetría *mmm* hace bajar la simetría del cristal hasta la clase 2, en la cual el eje de segundo orden es una dirección polar especial. En este caso la sección delgada *Z* de esfalerita puede revelar el efecto piezoeléctrico, lo que está confirmado experimentalmente.

2.5. Un cubo monocristalino pequeño de sal de roca se coloca en un campo eléctrico continuo homogéneo de modo que la dirección del vector de intensidad del campo **E** coincide por turno con las direcciones cristalográficas siguientes: a) [001], b) [111], c) [110], d) [*hk*0].

¿Cómo se cambiará la indicatriz óptica de cristal en cada uno de los casos enumerados*)?

Solución. a) Los cristales de la sal de roca pertenecen a la clase *m*3*m*. La simetría del campo eléctrico es ∞m. Si la dirección del vector de intensidad del campo eléctrico coincide con la dirección cristalográfica [001], es decir, el campo se aplica en la dirección del eje de cuarto orden, en este caso, según el principio de superposición de simetrías, la simetría del cristal baja hasta la tetragonal, 4*mm* (fig. 2.9).

---

*) La indicatriz óptica puede ser elipsoide triaxial, elipsoide de revolución o esfera (véase el § 4).

b) Si el campo está dirigido a lo largo de [111], es decir, en la dirección del eje de simetría de tercer orden, la simetría de cristal baja hasta la trigonal, $3m$ (fig. 2.10).

En ausencia del campo eléctrico, la indicatriz óptica del cristal cúbico es esfera, y en este cristal no existe birrefringencia (doble refracción).

Al aplicar un campo eléctrico al cristal, en el primero y en el segundo casos su indicatriz óptica se deforma, transformándose de la esfera en un elipsoide de revolución. En el cristal surge doble refracción: el cristal se hace ópticamente uniaxial.

c) Al superponer el campo eléctrico a lo largo de la dirección [110], es decir, a lo largo del eje de simetría de segundo orden, la simetría de cristal baja hasta la rómbica, mm (fig. 2.11).

d) Si el campo se superpone a lo largo de las direcciones de tipo [hk0], es decir, en una dirección arbitraria, pero que se halla en el plano de simetría, en este caso el cristal llega a ser monoclínico, de simetría m (fig. 2.12).

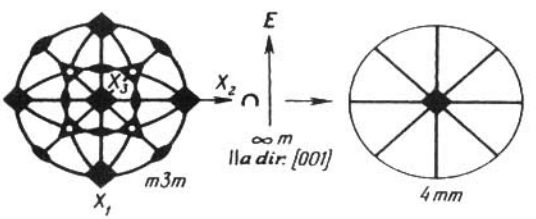


Fig. 2.9.

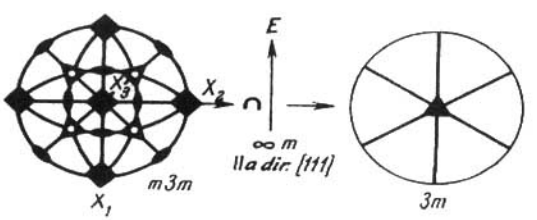


Fig. 2.10.

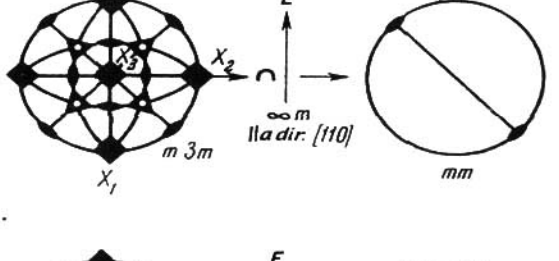


Fig. 2.11.

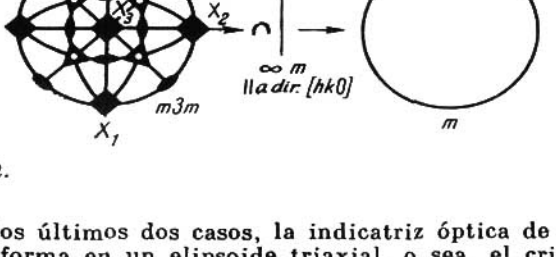


Fig. 2.12.

En los últimos dos casos, la indicatriz óptica de cristal se transforma en un elipsoide triaxial, o sea, el cristal se hace ópticamente biaxial.

Problemas

2.6. Para investigar las propiedades físicas de esfalerita han preparado dos láminas orientadas. Una de ellas está cortada perpendicularmente a la dirección [100], la otra, perpendicularmente a la dirección [111]. ¿A qué lámina, de estas dos, se recurrirá para detectar el efecto piezoeléctrico durante la acción de compresión uniaxial perpendicularmente a sus caras activas?

2.7. El cristal de cuarzo está traccionado: a) a lo largo de la dirección [0001], b) a lo largo de la dirección [10$\bar{1}$0]. ¿En qué caso, de los mencionados, en el cristal se puede observar cambio de polarización durante el calentamiento?

2.8. El campo eléctrico está aplicado al cristal KDP (dihidrofosfato de potasio) a lo largo de las direcciones: a) [001]; b) [110]; c) [010]. Hallar la simetría de cristal que

se encuentra en el campo para cada dirección indicada del campo eléctrico.

2.9. ¿Si se puede convertir el cristal de simetría inicial 432 en un cristal del grupo polar de simetría, superponiendo una tensión mecánica uniaxial en la dirección [110]? ¿Si se puede realizar tal transformación, superponiendo un campo eléctrico a lo largo de la misma dirección?

2.10. Determinar todos los cambios posibles en el grupo puntual de simetría del cristal ferroeléctrico*), perteneciente a la clase 222, si en el cristal se opera una transición ferroeléctrica. Examinar las direcciones siguientes, a lo largo de las cuales se supone que puede situarse el vector de polarización espontánea: a) [100], b) [010], c) [001], d) [*hk*0], e) [*hkl*].

2.11. Un cristal de simetría *mm* fue colocado en un campo eléctrico de modo que la dirección del campo coincidió con la dirección [001], luego con la dirección [010]. Hallar la simetría de cristal en el campo para los dos casos.

2.12. ¿A lo largo de qué direcciones cristalográficas la extensión uniaxial no hace cambiar la simetría de cristales de categoría media?

2.13. ¿En qué clases de simetría y a lo largo de qué direcciones la superposición del campo eléctrico **E** no origina el cambio de simetría de los cristales?

2.14. ¿A lo largo de qué direcciones cristalográficas hay que extender un cristal hexagonal, de simetría 6/*mmm*, para que su simetría baje: a) hasta la rómbica, b) hasta la monoclínica?

2.15. El campo eléctrico está aplicado a un cristal de simetría $\bar{6}$ a lo largo de las direcciones siguientes: a) [0001], b) [10$\bar{1}$0]. Determinar la simetría de cristal en el campo.

2.16. Hallar las direcciones cristalográficas, en las cuales hay que aplicar un campo eléctrico al cristal de simetría $\bar{6}m2$, para que su simetría baje: a) hasta la trigonal 3*m*, b) hasta la rómbica *mm*, c) hasta la monoclínica *m*.

2.17. Determinar la simetría del cristal en el campo de una tensión mecánica uniaxial aplicada a lo largo de las direcciones cristalográficas: a) [100], b) [110], c) [111], d) [*hk*0], e) [*hkl*], si su simetría en estado no tenso es 432.

---

*) La simetría de cristal en la fase ferroeléctrica se entiende en este caso como la simetría de dominio.

2.18. ¿Los cristales de qué simetría revelan efecto piezoeléctrico durante una compresión multilateral?

2.19. Un campo eléctrico está aplicado al cristal de simetría 23 a lo largo de las direcciones: a) [100], b) [111], c) [110], d) [*hk*0], e) [*hkk*], f) [*hkl*]. Hallar la simetría del cristal en el campo para cada método indicado de superposición del campo.

2.20. ¿Para qué clases de simetría de categoría media la aplicación del campo eléctrico en la dirección del eje del orden superior hace cambiar la simetría de la indicatriz óptica?

2.21. ¿A lo largo de qué direcciones cristalográficas hay que aplicar el campo eléctrico al cristal de simetría 622, para que la simetría de cristal baje hasta la monoclínica? Enumerar todas las direcciones cristalográficas, la superposición del campo **E** a lo largo de las cuales nos dé el mismo resultado.

2.22. El campo eléctrico está aplicado a un cristal de simetría 432 a lo largo de las direcciones cristalográficas indicadas en el problema 2.19. Determinar la simetría del cristal en el campo.

2.23. Determinar la simetría de un monocristal de esfalerita, al superponer el campo eléctrico a lo largo de las direcciones enumeradas en el problema 2.19.

2.24. Una lámina de niobato de litio está colocada en un campo eléctrico de modo que la dirección del vector de intensidad del campo **E** coincide: a) con la dirección cristalográfica [10$\bar{1}$0], luego b) con la dirección [11$\bar{2}$0]. Hallar la simetría del cristal en el campo. Enumerar la serie de direcciones cristalográficas, la superposición del campo **E** a lo largo de las cuales nos da el mismo resultado en el caso a) y en el caso b).

2.25. Determinar la simetría del cristal sometido a una tracción mecánica uniaxial en las direcciones indicadas en el problema 2.19, si la simetría del cristal se encuentra en estado no tenso 23.

2.26. Hallar todos los cambios posibles en el grupo puntual de simetría de un cristal ferroeléctrico que pertenece a la clase 2/*m*, si en el cristal se opera una transición ferroeléctrica de fase. Examinar las direcciones cristalográficas siguientes, por las cuales por lo supuesto se puede situar el vector de la polarización espontánea: a) [100], b) [010], c) [001], d) [*hk*0].

2.27. Determinar la simetría de un monocristal de titanato de bario en que se realiza una transición ferroeléctrica *de fase, si el vector de polarización espontánea se sitúa:* a) a lo largo de la dirección [100], b) a lo largo de la dirección [111].

2.28. ¿Qué simetría adquiere el cristal bajo la acción de tracción mecánica uniaxial en las direcciones indicadas en el problema 2.19, si su simetría en estado de tensión es $m3$? Examinar el caso de la acción de la tracción uniaxial en el cristal de simetría $3m$ a lo largo de las direcciones indicadas en el problema 2.24.

2.29. La simetría de las caras de cristales cabe en las diez clases siguientes: 1, 2, 3, 4, 6, m, mm, $3m$, $4mm$, $6mm$.

Al medir la microdureza de cristal, en su cara se pone una impresión de una pirámide de diamante tetraédrica, superponiendo en este caso la simetría $4mm$ en la simetría de la cara. Utilizando el principio de Curie, determinar la simetría que puede adquirir la impresión, al penetrar a presión la pirámide de diamante, si las caras son diferentes por su simetría.

2.30. ¿Qué simetría adquiere el medio isótropo continuo homogéneo (por ejemplo, fusión ígnea): a) en un campo eléctrico, b) en un campo magnético?

2.31. ¿Si se puede utilizar las láminas de ADP, orientadas por los planos (100), (110) y (001), para obtener la polarización en la dirección de la tensión mecánica uniaxial aplicada perpendicularmente a sus caras activas?

§ 3. PROPIEDADES FISICAS DE CRISTALES, QUE SE DESCRIBEN CON EL TENSOR DE PRIMER RANGO

Efecto piroeléctrico. Los cristales dieléctricos que en ausencia del campo eléctrico exterior tienen una polarización espontánea diferente de cero en toda la zona de temperaturas *de su existencia se llaman piroeléctricos.*

Los cristales en que la dirección de polarización espontánea no puede ser cambiada por la superposición del campo eléctrico exterior, incluso con los valores de tensión próximos *a la magnitud de tensión disruptiva, se llaman* los cristales piroeléctricos propiamente dichos. A éstos pertenecen turmalina, sulfato de litio, tartrato de potasio y otros. Los cristales en que la dirección de la polarización espontánea

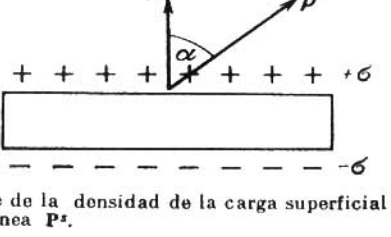


Fig. 3.1. Enlace de la densidad de la carga superficial σ con la polarización espontánea $\mathbf{P}^s$.

puede ser cambiada mediante la aplicación del campo exterior pertenecen a los ferroeléctricos*).

Gracias a la presencia de polarización espontánea, en las caras opuestas de la lámina cortada de un cristal piroeléctrico se hallan cargas ligadas. Su densidad σ depende de la magnitud y la dirección del vector de polarización espontánea respecto a las caras de la lámina**):

$$\sigma = (\mathbf{P}^s \cdot \mathbf{n}) = P_i^s n_i = |\mathbf{P}^s| \cos \alpha, \qquad (3.1)$$

donde n es vector unitario de la normal a la cara de lámina, α es ángulo entre los vectores $\mathbf{P}^s$ y n (fig. 3.1).

La densidad máxima de cargas se observará en las caras de una lámina cortada perpendicularmente a la dirección de polarización espontánea. Sin embargo, no se logra revelar la diferencia de potencial que surge entre las caras opuestas de lámina, ya que las cargas ligadas resultan ser compensadas por las cargas de aire y también debido a la conductibilidad, diferente de cero, de los cristales piroeléctricos.

Cambiándose uniformemente la temperatura de piroeléctricos, se cambia también la magnitud de su polarización espontánea. El efecto de cambio de la polarización espontánea de los cristales, ligado al cambio uniforme de su temperatura, se llama efecto piroeléctrico (piroefecto).

A condición de un cambio pequeño de temperatura ΔT, que es igual en todos los puntos del cristal (calentamiento

*) Los ferroeléctricos constituyen un subgrupo de piroeléctricos y tienen una serie de propiedades que son inherentes sólo a este grupo de cristales. Sal de Seignette, titanato de bario, dihidrofosfato de potasio, triglicinsulfato y otros son los ferroeléctricos más importantes.

**) En los cristales reales $\sigma \neq |\mathbf{P}^s|$ debido a la compensación de las cargas superficiales a costa de electroconductibilidad propia de cristales.

uniforme), el cambio del vector de polarización espontánea $\Delta \mathbf{P}^s$ es proporcional al cambio de la temperatura, es decir,

$$\Delta P^s = \gamma \Delta T \quad o \quad \Delta P_i^s = \gamma_i \Delta T, \tag{3.2}$$

donde γ (γ_1, γ_2, γ_3) es el vector de los coeficientes piroeléctricos (o, simplemente, coeficiente piroeléctrico), analíticamente definido así:

$$\gamma_i = \frac{dP_i^s}{dT}. \tag{3.3}$$

El coeficiente piroeléctrico γ se considera positivo, si la elevación de temperatura tiene por consecuencia un aumento de polarización espontánea del cristal.

Restricciones que se imponen por la simetría del cristal. El vector de polarización eléctrica $\mathbf{P}^s$ puede situarse en el *cristal sólo a lo largo de la dirección polar unitaria. Por eso,* según el principio de Neumann, el piroefecto lo pueden revelar los cristales que pertenecen a una de las 10 clases de simetría polares: 1, 2, 3, 4, 6, *m*, *mm*, 3*m*, 4*mm*, 6*mm*. Además, las texturas de simetría ∞ y ∞m pueden revelar también el efecto piroeléctrico.

La elección del sistema cristalofísico de coordenadas se determina por la simetría de cristal y la dirección del vector γ está enlazada con los elementos de simetría. Por lo tanto, en cada una de las 10 clases polares este vector tendrá componentes bien determinadas, diferentes de cero. Así, en el grupo de simetría de puntos 3*m* (tal simetría la tiene turmalina en que el piroefecto fue observado por primera vez) *la dirección del eje de simetría 3 es la dirección polar unitaria.* Por consiguiente, a lo largo de este eje se sitúan el vector de polarización $\mathbf{P}^s$ y el vector γ. En el sistema cristalofísico de coordenadas, el eje de simetría 3 coincide con el eje coordenado X_3; el vector γ está dirigido a lo largo de X_3 y sus componentes $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\gamma_3 \neq 0$, es decir, γ sólo tiene una componente independiente.

Efecto electrocalorífico. De las consideraciones termodinámicas se desprende que existe un efecto contrario al piroeléctrico. Este efecto consiste en el cambio de la temperatura del piroeléctrico al actuar en él un campo eléctrico y lleva el nombre de efecto electrocalorífico. La ecuación del efecto electrocalorífico es

$$\Delta T = \mathbf{q}\, \Delta \mathbf{E}, \tag{3.4}$$

donde el coeficiente electrocalorífico $\mathbf{q} = d\mathbf{T}/d\mathbf{E}$ y está enlazado con el coeficiente piroeléctrico $\boldsymbol{\gamma}$ mediante la correlación

$$\mathbf{q} = -\frac{\boldsymbol{\gamma} T}{\rho c J}, \tag{3.5}$$

donde ρ y c son, respectivamente, densidad y capacidad calorífica de cristal, J es equivalente mecánico del calor (véase la deducción de la fórmula (3.5) en el problema 3.3).

Al colocar el valor de $\mathbf{q}$ de (3.5) en la ecuación (3.4) obtenemos la correlación siguiente que describe el efecto electrocalorífico:

$$\Delta T = -\frac{\boldsymbol{\gamma} T}{\rho c J} \Delta \mathbf{E}, \tag{3.6}$$

de la cual resulta que, si el coeficiente $\boldsymbol{\gamma}$ es positivo y el vector de intensidad del campo eléctrico $\mathbf{E}$ coincide con la dirección $\mathbf{P}$, el coeficiente $\mathbf{q}$ será negativo (es decir, en este caso, el aumento de la polarización del cristal a costa del campo aplicado hace bajar su temperatura).

Ejemplos de solución de los problemas

3.1. ¿Qué cambio de temperatura se puede medir, utilizando un receptor piroeléctrico que consta de una lámina de turmalina de 1 mm de grosor y un milivoltímetro, cuya sensibilidad es de 10^{-3} V/graduación? ¿Cuál es la mejor manera de cortar una lámina para estos fines? ¿Con qué valor se puede caracterizar la sensibilidad de tal receptor piroeléctrico? ¿Cuántas veces aumentaría la sensibilidad de receptor, si en vez de una lámina de turmalina utilizáramos una lámina de sulfato de litio del mismo grosor cortada perpendicularmente al eje polar?

Solución. El único coeficiente piroeléctrico de turmalina γ_3 está enlazado con la dirección polar del cristal, es decir, con el eje 3. Según la ecuación (3.1), el modo más conveniente de orientar la lámina de turmalina es cortarla perpendicularmente al eje 3, es decir, a lo largo del plano (0001). El cambio de temperatura que puede «sentir» esta lámina podemos hallarlo mediante la ecuación (3.2) que en este caso se escribirá así:

$$\Delta P_3^s = \gamma_3 \Delta T. \tag{3.7}$$

Teniendo en cuenta que $\Delta P^s = |\Delta\sigma|$, $\Delta V = \Delta Q/c \approx \approx 10^{-3}$ V/graduación, $\Delta Q = \Delta\sigma S$ y $c = \varepsilon_{33} S/d$; de (3.7)

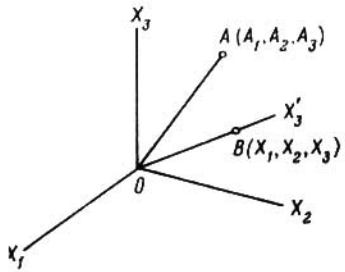


Fig. 3.2.

hallamos que el cambio mínimo de temperatura que se puede medir, utilizando un milivoltímetro y una lámina de turmalina de 1 mm de grosor será

$$\Delta T = \frac{\varepsilon_{33}\Delta V \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}{d\gamma_3} \approx$$

$$\approx 10^{-5} \text{ grad.}$$

La sensibilidad del receptor de tensión piroeléctrica para el régimen de marcha en vacío se puede caracterizar con la relación

$$\frac{\Delta V}{\Delta T} = A\,\frac{\gamma_i}{\varepsilon_{ii}},$$

donde A es constante igual a $d/(8{,}85 \cdot 10^{-12})$; γ_i y ε_{ii} son valores del coeficiente piroeléctrico y de la constante dieléctrica a lo largo del eje polar X_i. Utilizando los valores de ε_{ii} y γ_i para turmalina y sulfato de litio*), obtenemos que la sensibilidad del receptor con la lámina de sulfato de litio es aproximadamente 27 veces superior que la del receptor con la lámina de turmalina.

3.2. Hallar la ecuación de la superficie de índices**) del efecto piroeléctrico. ¿Qué simetría tiene esta superficie?

Solución. Supongamos que en el sistema de coordenadas X_1, X_2, X_3 a lo largo de la dirección polar OA, el efecto piroeléctrico se determina por el vector A (A_1, A_2, A_3) (fig. 3.2).

Elijamos nueva dirección OB y hagamos coincidir con ella el eje X_3' del sistema de coordenadas nuevo. En este caso, por la dirección OB, la magnitud del efecto piroeléctrico se determina por A_3'. Colocando A_3' en la dirección OB, obtenemos el vector X (x_1, x_2, x_3), en este caso

$$A_3'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \qquad (3.8)$$

---

*) Para el sulfato de litio, igual que para todos los cristales de la clase 2, el eje polar en un sistema estandartizado es el eje X_2.

**) La superficie de índices de una propiedad física de cristal es la superficie, cuyo radio vector en cierta dirección es numéricamente igual al valor que caracteriza la propiedad en esta dirección.

Expresemos A_3' mediante componentes del vector inicial **A** (A_1, A_2, A_3):

$$A_3' = C_{31}A_1 + C_{32}A_2 + C_{33}A_3, \tag{3.9}$$

donde

$$C_{31} = x_1/A_3', \quad C_{32} = x_2/A_3', \quad C_{33} = x_3/A_3'.$$

Por consiguiente,

$$\left.\begin{aligned} A_3' &= \frac{x_1}{A_3'}A_1 + \frac{x_2}{A_3'}A_2 + \frac{x_3}{A_3'}A_3, \\ A_3'^2 &= x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3. \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

Igualando (3.8) y (3.10), obtenemos

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3. \tag{3.11}$$

La ecuación (3.11) es la de la superficie de índices del efecto piroeléctrico. Transformándola, tenemos:

$$x_1^2 - x_1A_1 + x_2^2 - x_2A_2 + x_3^2 - x_3A_3 = 0,$$

$$x_1^2 - x_1A_1 = x_1^2 - \frac{2}{2}x_1A_1 + \frac{A_1^2}{4} - \frac{A_1^2}{4} = \left(x_1 - \frac{A_1}{2}\right)^2 - \frac{A_1^2}{4}.$$

Lo mismo podemos escribirlo para $x_2^2 - x_2A_2$ y $x_3^2 - x_3A_3$. Después de estas transformaciones la ecuación (3.11) adquiere la forma siguiente:

$$\left(x_1 - \frac{A_1}{2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{A_2}{2}\right)^2 + \left(x_3 - \frac{A_3}{2}\right)^2 = \frac{A_1^2}{4} + \frac{A_2^2}{4} + \frac{A_3^2}{4}.$$

Hemos obtenido la ecuación de esfera, cuyo centro se encuentra en la mitad del vector **A**. Puesto que, al cambiarse la dirección del vector **A** por la contraria, se varía también el signo de polarización, en este caso la superficie de índices del efecto piroeléctrico tiene la forma de dos esferas que tienen contacto en el origen de coordenadas.

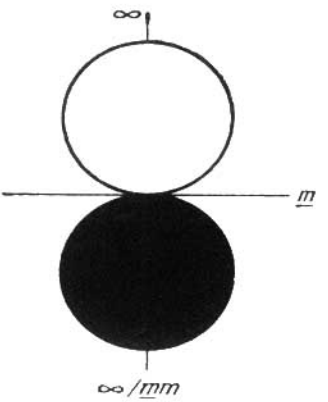


Fig. 3.3. Superficie de índices del efecto piroeléctrico.

Una de las esferas corresponde al extremo positivo del vector **A** y la otra, al negativo, por eso es conveniente representarlas en negro y blanco (fig. 3.3). Tal forma de la superficie de índices del piroefecto demuestra de un modo claro que, en primer lugar, los signos de las cargas que surgen en las caras opuestas del piroeléctrico son diferentes y, en segundo lugar, la densidad de cargas cambia según la ley: $\sigma = \sigma_0 \cos \alpha$.

La figura del dibujo 3.3 tiene la simetría ∞m, si se toma en consideración sólo su forma. Si se tiene en cuenta también los colores: negro y blanco que, en este caso, simbolizan las cargas positiva y negativa, entre las dos esferas se debe trazar un plano de antisimetría.

Las operaciones de antisimetría consisten en operaciones de simetría ordinaria en combinación con la operación de cambio del signo de la figura. El sentido físico de este cambio puede ser diferente: cambio del signo de la carga (más — menos), cambio del color (negro — blanco), cambio del signo de deformación (tracción — compresión), etc. El con-

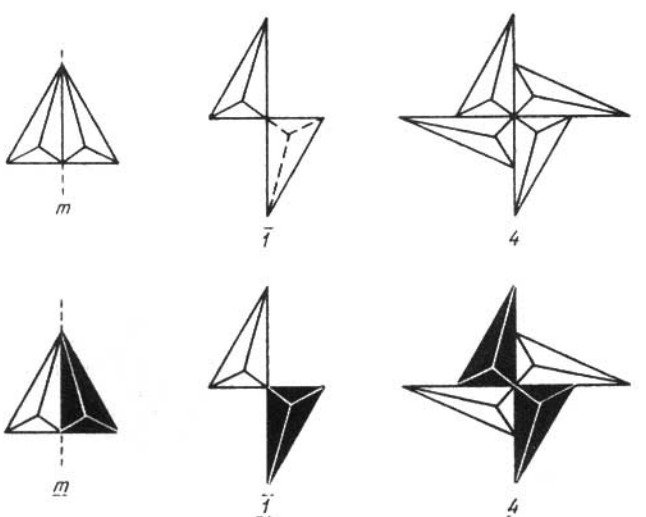


Fig. 3.4. Ejemplos de las figuras simétricas y **antisimétricas.**

cepto de antisimetría introducido por el académico A. Shúbnikov es utilizado en cristalofísica para describir las superficies vectoriales y tensoriales, para explicar las propiedades magnéticas de cristales, etc. Las operaciones de antisimetría se designan con el símbolo de la operación de simetría correspondiente y una raya por debajo (fig. 3.4).

Entre estos símbolos, la antisimetría de la superficie de índices del efecto piroeléctrico se define como ∞/mm.

3.3. Demostrar que el coeficiente del efecto electrocalorífico q está enlazado con el coeficiente piroeléctrico γ por medio de la correlación $q = -\frac{\gamma T}{\rho c J}$. Determinar su valor para cristales de turmalina.

Solución. La variación de la energía del volumen elemental del cristal, que acompaña cambios pequeños de las condiciones eléctricas y térmicas, es el diferencial total, es decir,

$$dU = \mathbf{E}\, d\mathbf{P} + T\, dS, \quad \text{o} \quad d(U - \mathbf{EP}) = -\mathbf{P}\, d\mathbf{E} + T\, dS$$

donde dS es el cambio de la entropía; $d\mathbf{P}$ es el cambio de la polarización del cristal debido a la aplicación del campo $\mathbf{E}$.

Por eso, escribamos la expresión para T en forma explícita y tomemos la derivada dT/dE, utilizando la ecuación del efecto electrocalorífico (3.4):

$$q = \left(\frac{dT}{dE}\right)_S = -\left(\frac{d\mathbf{P}}{dS}\right)_E = -\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial S}.$$

Puesto que $\partial \mathbf{P}/\partial T = \gamma$, $q = -\gamma\, \partial T/\partial S$. Utilizando las correlaciones termodinámicas $dS = dQ/T$, $dQ = dT\rho cJ$, tenemos

$$q = \frac{dT}{d\mathbf{E}} = -\frac{\gamma T}{\rho c J},$$

donde ρ es la densidad del cristal; c es su capacidad calorífica; J es el equivalente mecánico del calor, que es igual a $4{,}18 \cdot 10^7$ erg/cal. Colocando los datos de turmalina, obtenemos

$$q_3 = 1{,}5 \cdot 10^{-5} \text{ unid. CGSE.}$$

3.4. *Es necesario controlar, dentro de las temperaturas normales* (22—24° C) la exactitud con que se mantiene la temperatura constante o medir su pequeña variación. ¿Qué cristal hay que utilizar para este fin: el de turmalina o de sal de Seignette? ¿Qué instrumento se utilizará: galvanómetro balístico o milivoltímetro?

Solución. Las temperaturas propuestas son próximas al punto superior de Curie de la sal de Seignette. Por eso, el coeficiente piroeléctrico correspondiente será grande: $\gamma_1 = 200$ unid. CGSE. Pero la permeabilidad dieléctrica ε_1 alcanzará su valor máximo $\varepsilon_1 = 1000$.

Para una lámina de sección X de la sal de Seignette, según (3.2),

$$\Delta P_1^s = 200\Delta T;$$

puesto que $E = P/\varkappa$ y $\varepsilon = 1 + 4\pi\varkappa$, en este caso

$$E_1 = \frac{12{,}8 \cdot 200}{1000}\,\Delta T = 2{,}56\Delta T.$$

Para una lámina de sección Z de turmalina

$$\Delta P_3^s = 1{,}2\Delta T,$$

$$E_3 = \frac{12{,}8 \cdot 1{,}2}{7{,}5}\,\Delta T = 2{,}00\Delta T.$$

Es evidente que, siendo grande el valor γ_1 de ferroeléctrico, la diferencia de potencial entre las caras opuestas de la lámina resulta ser, aproximadamente, igual a la de turmalina, dieléctrico lineal, cuyo coeficiente piroeléctrico es pequeño. Pero la magnitud de carga en la cara, proporcional a ΔP^s, para la sal de Seignette es casi 200 veces mayor que para la turmalina. Por eso, para el fin planteado en el problema, es conveniente utilizar una lámina de sal de Seignette y un galvanómetro balístico.

3.5. ¿Si resistirá una lámina de cristal de triglicinsulfato (TGS) una caída brusca de la temperatura desde el punto de Curie 49° C hasta 39° C? Considerar la rigidez dieléctrica del cristal igual a 40 kV/cm.

Solución. La simetría de cristal de TGS en parafase es $2/m$, en ferrofase, 2. La dirección del eje 2 se acepta por la dirección del eje coordenado X_2. Por eso, la ecuación del efecto piroeléctrico tendrá la forma siguiente:

$$\Delta P_2^s = \gamma_2 \Delta T$$

Aceptemos el valor medio para γ_2 junto al punto de Curie igual a 500 unid. CGSE. En este caso

$$\Delta P_2^s = 500 \cdot 10 = 5 \cdot 10^3 \text{ unid. CGSE.}$$

La intensidad del campo eléctrico correspondiente es

$$E = \frac{4\pi \cdot \Delta P_2}{\varepsilon_2} = \frac{12{,}8 \cdot 5 \cdot 10^3}{25} = 2600 \text{ unid. CGSE} \approx 10^6 \text{ V/cm}.$$

Esta sobrepasa la rigidez dieléctrica del cristal que estará destruido.

3.6. ¿En cuántos grados y a la zona de qué temperaturas se puede «desplazar» el punto de transición de fase de los cristales KDP a cuenta del efecto electrocalorífico, colocándolos a la temperatura de transición de fase $T_C = -150°$ C en un campo eléctrico de 20 kV·cm^{-1} de intensidad, aplicado de manera que la dirección del vector **E**: a) coincide con la dirección **P**^{s}; b) es opuesta a la dirección **P**^{s}?

($c = 0{,}1$ cal·g^{-1}·grad^{-1}, $\gamma_3 = 5000$ unid. CGSE.)

Solución. El valor del único coeficiente electrocalorífico de cristales de KDP en la fase ferroeléctrica se halla según la correlación (3.5):

$$q_3 = -\frac{\gamma_3 T}{\rho c J} = -0{,}06 \text{ unid. CGSE.}$$

La variación de la temperatura, que se debe a la superposición del campo eléctrico, es igual a

$$\Delta T = q_3 \Delta E = -4°.$$

Así pues, el campo de 20 V·cm^{-1} de intensidad, que coincide con la dirección de la polarización espontánea cerca del punto de Curie, enfriará el cristal a expensas del efecto electrocalorífico, aproximadamente, en 4°; esto significa que este campo es capaz de «desplazar» el punto de Curie de KDP hacia las temperaturas más altas en 4°.

Si este campo lo aplicamos en la dirección contraria a la dirección **P**, el cristal se calentará en 4° y el punto de Curie se desplazará en este caso a la zona de las temperaturas más bajas en la misma magnitud.

Problemas

3.7. Calcular la variación de la temperatura de una lámina de cristal de KDP a cuenta del efecto electrocalorífico espontáneo.

3.8. Hallar la densidad de las cargas superficiales que surgen en las caras opuestas de una lámina de turmalina, calentándola uniformemente en 30°, si la lámina está cortada de modo que:

a) la normal a la lámina es paralela al eje de simetría 3;

b) el ángulo, comprendido entre la normal a la lámina y el eje 3 es de 60°;

c) la normal a la lámina es perpendicular al eje 3.

3.9. ¿Qué cambio de temperatura puede ser medido, utilizando una lámina de sulfato de litio de 1 mm de grosor y un milivoltímetro, cuya sensibilidad es de 10^{-3} V/graduación? ¿Cómo, de la mejor manera, hay que cortar la lámina para estos fines?

3.10. Determinar la intensidad tal del campo eléctrico, aplicado al cristal de turmalina a lo largo de la dirección [0001], que produzca una polarización igual que la producida por un cambio uniforme de la temperatura del cristal en 10°.

3.11. ¿Qué diferencia de potencial adquiere una lámina de tartrato de potasio de dimensiones: $1 \times 1 \times 0{,}1$ cm^3 cortada perpendicularmente al eje 2, calentándola uniformemente en 10°? ¿Qué carga aparece en sus caras?

3.12. ¿Cómo desplazará la temperatura de puntos de Curie de la sal de Seignette, si el cristal está colocado en un campo eléctrico, cuya intensidad es de 1000 V/cm? El campo está aplicado en la dirección del eje eléctrico del cristal.

3.13. Calcular el valor del coeficiente piroeléctrico de titanato de bario cerca de su punto superior de Curie, si es sabido que el efecto electrocalorífico espontáneo hace desplazar el punto de Curie, aproximadamente, en 1°.

3.14. ¿Qué tensión se genera entre las armaduras de un condensador que representa en sí una lámina de turmalina de sección Z, de 1 mm de grosor, enfriándola de 50° C hasta la temperatura normal?

3.15. ¿En cristales de qué clases de simetría el vector de polarización espontánea de un piroeléctrico puede cambiar, durante la variación de la temperatura, no sólo su magnitud, sino también su dirección?

3.16. Apreciar el cambio de temperatura de una lámina de turmalina colocada en un campo eléctrico, cuya intensidad es de 20 kV/cm.

3.17. ¿Qué carga se puede extraer de las caras opuestas de una lámina de sulfato de litio de dimensiones: $1{,}2 \times 2 \times 0{,}2$ cm^3, cortada bajo el ángulo de 60° respecto del eje 2, calentándola en 40°?

§ 4. PROPIEDADES FÍSICAS DE CRISTALES, QUE SE DESCRIBEN CON EL TENSOR DE SEGUNDO RANGO

Permeabilidades dieléctrica y magnética, impermeabilidad y susceptibilidad, electroconductibilidad y resistencia eléctrica específicas, conductividad y expansión térmicas, efecto piezocalorífico, etc., se describen en los cristales mediante el tensor de segundo rango. Así, por ejemplo, la ley de Ohm para el medio isótropo se escribirá en la forma siguiente:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E},$$

donde los vectores j que es la densidad de corriente, y E que es la intensidad de campo, son paralelos y la electroconductibilidad específica σ se representa con un número. Pero el valor de la electroconductibilidad específica en los cristales depende de la dirección, con la particularidad de que, en el caso general, cada componente del vector de la densidad de corriente depende linealmente de todas las tres componentes del vector de intensidad de campo.

Si está elegido el sistema ortogonal de coordenadas, la ley diferencial de Ohm se escribirá para los cristales, en el caso general, como un sistema de tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} j_1 &= \sigma_{11}E_1 + \sigma_{12}E_2 + \sigma_{13}E_3, \\ j_2 &= \sigma_{21}E_1 + \sigma_{22}E_2 + \sigma_{23}E_3, \\ j_3 &= \sigma_{31}E_1 + \sigma_{32}E_2 + \sigma_{33}E_3. \end{aligned}$$

Utilizando la regla de la suma de Einstein, podemos escribir las ecuaciones anteriores en la forma siguiente:

$$j_i = \sigma_{ij}E_j \quad (i, j = 1, 2, 3). \tag{4.1}$$

La adición se efectúa por el índice que se repite. Los valores de coeficientes de proporcionalidad σ_{ij} en las ecuaciones (4.1) determinan la electroconductibilidad específica del cristal. Así pues, a diferencia de un cuerpo isótropo, para determinar la electroconductibilidad específica en un cristal, no se indicará un número, sino, en el caso general, nueve números:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}.$$

Los valores concretos de coeficientes σ_{11}, σ_{22}, σ_{33}, etc., dependen de la elección del sistema de coordenadas, enlazado con el cristal. Durante la transición del sistema de coordenadas X_1, X_2, X_3 al nuevo X_1', X_2', X_3', los valores de los coeficientes σ_{ij} se cambian según la ley:

$$\sigma_{ij}' = C_{ik}C_{jl}\sigma_{kl}, \qquad (4.2)$$

donde σ_{ij}' son coeficientes en el sistema nuevo X_1', X_2', X_3'; σ_{kl} son coeficientes en el sistema viejo X_1, X_2, X_3; C_{ik}, C_{jl} son cosenos directores que determinan las posiciones de los ejes X_1', X_2', X_3' con respecto a los ejes X_1, X_2, X_3.

Los valores que se determinan por nueve números dependientes de la elección del sistema de coordenadas y que se transforman según la ley (4.2), al pasar a otro sistema, constituyen el tensor de segundo rango.

Los coeficientes viejos pueden expresarse mediante los nuevos con la ayuda de la correlación

$$\sigma_{ij} = C_{kl}C_{ij}\sigma_{kl}'. \qquad (4.2a)$$

La electroconductibilidad específica, la permeabilidad y la susceptibilidad dieléctricas, la conductividad térmica específica, la expansión térmica, la permeabilidad y la susceptibilidad magnéticas, todas estas propiedades físicas de cristales se describen con ayuda de los tensores simétricos de segundo rango, lo que quiere decir que para ellas son justas las correlaciones

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ji}, \\ \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ji}, \text{ etc.,} \end{aligned}\right\} \qquad (4.3)$$

que reducen el número de las componentes independientes de los tensores indicados hasta seis.

Superficie característica de un tensor simétrico de segundo rango. Para imaginarse de un modo más claro las propiedades en cuestión de los cristales, el carácter de su anisotropía y el enlace con la simetría de cristal, se recurre a una interpretación geométrica de los tensores de segundo rango con las superficies de segundo orden. Si en la ecuación general de la superficie de segundo orden

$$S_{11}x_1^2 + S_{22}x_2^2 + S_{33}x_3^2 + S_{12}x_1x_2 + S_{21}x_2x_1 + \\ + S_{13}x_1x_3 + S_{31}x_3x_1 + S_{23}x_2x_3 + S_{32}x_3x_2 = 1 \qquad (4.4)$$

tomamos, en calidad de coeficientes, las componentes del tensor simétrico de segundo rango ($S_{ij} = S_{ji}$), obtenemos

una superficie llamada la superficie característica del tensor de segundo rango.

Así, la superficie característica de la electroconductibilidad específica del cristal, en el caso general, se describe con la ecuación

$$\sigma_{11}x_1^2 + \sigma_{22}x_2^2 + \sigma_{33}x_3^2 + 2\sigma_{32}x_3x_2 + 2\sigma_{13}x_1x_3 + 2\sigma_{12}x_1x_2 = 1.$$

Ejes principales del tensor simétrico de segundo rango. Las superficies de segundo orden poseen ejes principales que son tres direcciones perpendiculares entre sí. Si los tomamos como ejes coordenados, la ecuación general de superficie (4.4) adquiere una forma muy sencilla:

$$S_{11}x_1^2 + S_{22}x_2^2 + S_{33}x_3^2 = 1. \qquad (4.5)$$

Si las magnitudes S_{11}, S_{22}, S_{33} son positivas, la superficie (4.5) es un elipsoide; si dos coeficientes son positivos y uno es negativo, la superficie (4.5) es un hiperboloide de una hoja. Si un coeficiente es positivo y dos son negativos, la superficie (4.5) representa un hiperboloide de dos hojas.

La ecuación de la superficie característica de la electroconductibilidad específica representada en los ejes principales, es

$$\sigma_{11}x_1^2 + \sigma_{22}x_2^2 + \sigma_{33}x_3^2 = 1.$$

Por lo tanto, el tensor de segundo rango en el sistema de coordenadas principal tendrá una forma diagonal

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \text{ ó } \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \sigma \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}.$$

Los valores σ_1, σ_2, σ_3 se llaman componentes principales del tensor de electroconductibilidad específica o, en forma abreviada, electroconductibilidades específicas principales de cristal.

En el sistema principal de coordenadas las ecuaciones (4.1) también se hacen más sencillas:

$$j_1 = \sigma_1 E_1, \quad j_2 = \sigma_2 E_2, \quad j_3 = \sigma_3 E_3.$$

Si el campo eléctrico está aplicado en dirección del eje coordenado principal X_1, en este caso $E_2 = E_3 = 0$; entonces $j_2 = j_3 = 0$ y $\mathbf{j}_1$ es paralelo a $\mathbf{E}$.

Las mismas consideraciones son justas con respecto a los ejes coordenados X_2 y X_3. Por eso, podemos decir que los ejes principales en el cristal son las direcciones a lo

largo de las cuales el vector de influencia y el de reacción coinciden en su dirección.

Examinando la influencia de la simetría del cristal en la forma del tensor de segundo rango, es muy conveniente utilizar la representación de tensores de segundo rango y de las ecuaciones de superficies características correspondientes en el sistema principal de coordenadas.

Valor que caracteriza una propiedad en la dirección dada. Los cristales son anisótropos, es decir, sus propiedades son diferentes en dependencia de la dirección. En el caso general, si el cristal se somete a una influencia vectorial, por ejemplo, se coloca en un campo eléctrico, la dirección de la corriente en él no coincide con la dirección del campo. Por eso, la magnitud que caracteriza una propiedad en el cristal según una dirección cualquiera, en el caso dado la electroconductibilidad, se determina como la componente de la densidad de corriente $j_{\|}$ paralela a **E**, dividida en **E**. Si está aplicado un campo unitario, en este caso, la electroconductibilidad en la dirección del campo es numéricamente igual a $j_{\|}$.

Si se conoce el tensor que determina la propiedad física del cristal en el sistema de coordenadas elegido, por ejemplo, el tensor de permeabilidad dieléctrica $[\varepsilon_{ij}]$, la magnitud de permeabilidad dieléctrica en cualquier dirección **n** en el cristal se calcula mediante la correlación

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{ij} n_i n_j, \tag{4.6}$$

donde n_i, n_j son componentes del vector unitario $\boldsymbol{n}$ (cosenos directores de la dirección dada).

Propiedades geométricas de la superficie característica. La magnitud del radio vector de la superficie característica **r** en una dirección cualquiera está enlazada con la magnitud que caracteriza la propiedad correspondiente en la misma

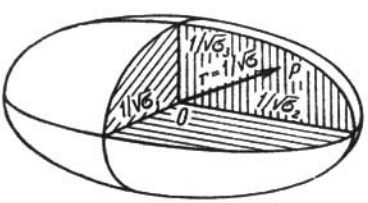


Fig. 4.1. Superficie característica del tensor de electroconductibilidad.

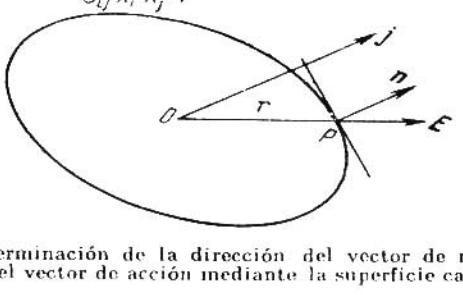


Fig. 4.2. Determinación de la dirección del vector de reacción por la dirección del vector de acción mediante la superficie característica.

dirección, por ejemplo, σ, con la correlación (fig. 4.1).

$$r = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \quad o \quad \sigma = \frac{1}{r^2}. \tag{4.7}$$

Si la propiedad dada forma parte de la ecuación de interacción vector-vectorial (influencia vectorial, reacción vectorial), como esto tiene lugar en la ley de Ohm, en este caso la superficie característica de la propiedad nos da la posibilidad de determinar la dirección del vector de reacción según la dirección del vector de influencia y viceversa.

Si $j_i = \sigma_{ij} E_j$, en este caso la dirección **j** para **E** dado puede ser encontrada, trazando el radio vector $\overline{OP}$ de la superficie característica, paralelo al campo **E**, y luego bajando una perpendicular al plano tangente a la superficie característica en el punto P (fig. 4.2).

Influencia de la simetría del cristal en sus propiedades que se describen con tensores de segundo rango. La simetría de cristal impone restricciones sustanciales al número de componentes independientes del tensor de segundo rango.

La superficie característica tiene, en la mayoría de los casos, una orientación fija respecto de los elementos de simetría del cristal, puesto que la simetría de la propiedad física y, por consiguiente, la simetría de la superficie característica, según el principio de Neumann, comprende la simetría puntual del cristal (véase la tabla en la pág. 49).

La ecuación de la superficie característica contiene tantos coeficientes independientes, cuantas componentes tiene el

tensor correspondiente y la simetría de la superficie coincide con la simetría de la propiedad física.

Mediciones en muestras orientadas. En la práctica se emplea mucho la correlación (4.6) para calcular las magnitudes que caracterizan las propiedades físicas de muestras orientadas, y también para la tarea inversa: basándose en los datos de mediciones de muestras orientadas, componer el tensor que describa la propiedad física del cristal. En libros técnicos las láminas y barretas orientadas planas suelen denominar secciones delgadas, con la particularidad de que el término «sección» se utiliza para designar normales de las caras principales («activas») de una lámina o barreta en el sistema de coordenadas cristalofísico. Así, por ejemplo, las secciones X, Y, Z son láminas o barretas en que las normales de las aristas principales son paralelas, respectivamente, a los ejes X_1, X_2, X_3 (véase la fig. 2.3).

Para caracterizar la orientación de secciones oblicuas*) están aceptados los índices siguientes.

Las direcciones de anchura, de grosor y de longitud de una lámina cristalina se designan con ω, t y l. Las mismas secciones oblicuas se caracterizan con los símbolos de tipo (X_1, X_2, t, θ), $(X_2, X_3, t, \omega, \theta, \varphi)$, etc. La primera letra significa la dirección del grosor hasta el giro; la segunda corresponde a la dirección de longitud hasta el giro. La tercera letra y el primer número corresponden al primer eje de rotación y a la magnitud del ángulo de giro, medido en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj. La cuarta letra y el segundo número corresponden al segundo eje de rotación y al ángulo del giro medido en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj.

Algunas secciones están representadas en la fig. 4.3, a — d. Investigando las propiedades de las secciones oblicuas enlazadas con los ejes nuevos X_1', X_2', X_3' (los ejes rayados se dirigen según las aristas de la barreta o de lámina), se utilizan las correlaciones (4.2) y (4.6). Evidentemente, cada uno de los coeficientes en los ejes X_1', X_2', X_3' será una combinación lineal de coeficientes principales. Y, viceversa, para obtener los coeficientes principales, a menudo, en la práctica es más cómodo realizar mediciones de las propiedades en las secciones oblicuas del cristal y de los datos obte-

*) Estos signos están aceptados por el Comité Internacional de Piezoelectricidad de la Sociedad de Ingenieros de Radio en 1946, en lo fundamental, para los cristales piezoeléctricos.

Clasificación de cristales según prop. ópticas	Singonía (Sistema)	Simetría característica	Tipo de superficie característica y su orientación	Número de componentes independientes de tensor	Tensor, reducido a los ejes de orientación admitida
Medio isótropo	Cúbica	Cuatro ejes 3	Esfera	1	$\begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix}$
Cristales uniaxiles	Tetragonal	Un eje 4	Superficie de rotación alrededor del eje principal de simetría X_3 (Z)	2	$\begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{bmatrix}$
	Hexagonal	Un eje 6			
	Trigonal	Un eje 3			
Cristales biaxiles	Rómbica	Tres ejes 2 perpendiculares entre sí. No hay ejes de orden superior	Superficie de segundo orden con los ejes X_1, X_2, X_3, paralelos a los ejes 2: X, Y, Z	3	$\begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{bmatrix}$
	Monoclínica	Un eje 2 ó plano m	Superficie de segundo orden con un eje X_2, paralelo al eje 2 o perpendicular al plano m	4	$\begin{bmatrix} S_{11} & 0 & S_{13} \\ 0 & S_{22} & 0 \\ S_{13} & 0 & S_{33} \end{bmatrix}$
	Triclínica	Centro de simetría o ausencia de simetría	Superficie de segundo orden. Posición respecto de ejes cristalográficos no está determinada	6	$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix}$

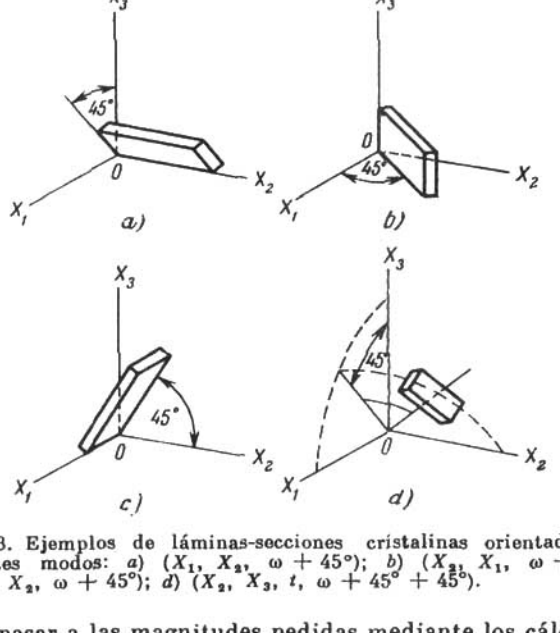


Fig. 4.3. Ejemplos de láminas-secciones cristalinas orientadas de diferentes modos: *a*) $(X_1, X_2, \omega + 45°)$; *b*) $(X_2, X_1, \omega + 45°)$; *c*) $(X_3, X_2, \omega + 45°)$; *d*) $(X_2, X_3, t, \omega + 45° + 45°)$.

nidos pasar a las magnitudes pedidas mediante los cálculos.

Supongamos que X_1, X_2, X_3 son los ejes enlazados rígidamente con un cristal monoclínico en un sistema estandartizado; X_1', X_2', X_3' son los ejes ortogonales enlazados con la muestra orientada, con la particularidad de que el eje X_3' coincide con la dirección, a lo largo de la cual se mide la magnitud de la permeabilidad dieléctrica del cristal (fig. 4.4). En este caso, su magnitud en los ejes X_1', X_2', X_3' se designa como ε_{33}'. Por otro lado, la magnitud ε_{33}' que se mide, según la ecuación (4.6) se expresa por medio de las componentes del tensor $[\varepsilon_{ij}]$ en un sistema estandartizado. Al medir los valores de ε_{33}' para las muestras de cuatro orientaciones diferentes, tendremos cuatro ecuaciones que enlazan las componentes independientes del tensor $[\varepsilon_{ij}]$ de un cristal monoclínico. Resolviéndolas, obtenemos las componentes del tensor de permeabilidad dieléctrica en el sistema de coordenadas X_1, X_2, X_3. Así pues, las mediciones de muestras orientadas

nos dan la posibilidad de determinar todas las componentes del tensor $[\varepsilon_{ij}]$, como de cualquier tensor de segundo rango, que describe las propiedades físicas de cristales en un sistema estandartizado.

Superficies de índices y curvas. La variación de la magnitud de una propiedad física según el cambio de la dirección para cualquier cristal se puede expresar por medio de las superficies y curvas de índices, cuyos radios vectores son proporcionales a la magnitud de la propiedad según la dirección dada. Por ejemplo, si es conocido el tensor de permeabilidad dieléctrica en un sistema estandartizado, la superficie de índices del coeficiente ε'_{33} se puede construir, colocando desde un punto arbitrario por el radio vector variable la magnitud de ε'_{33} en escala correspondiente; en este caso la magnitud de ε'_{33} para una dirección arbitraria X'_3 se calcula según la fórmula (4.6). La ecuación de esta superficie es

$$\varepsilon'_{33} = C_{3l}C_{3j}\varepsilon_{ij}.$$

Tensores inversos. Para calcular las magnitudes que caracterizan las propiedades físicas de los cristales a veces es necesario hallar, utilizando las componentes conocidas de un tensor que describe una propiedad física cualquiera de cristales, las componentes del tensor inverso. Por ejemplo, conociendo el tensor de electroconductibilidad específica de cristal, cuyas componentes forman parte de la ecuación

$$j_i = \sigma_{ij}E_j,$$

hallar el tensor de resistencia específica, las componentes

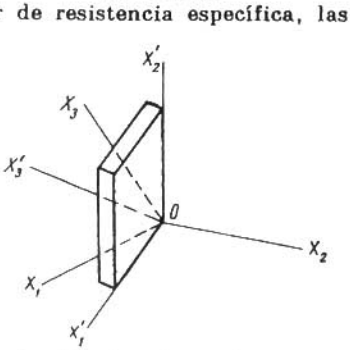


Fig. 4.4. Lámina cristalina de orientación arbitraria.

del cual forman parte de la ecuación

$$E_i = \rho_{ij} j_j.$$

En el caso general, las componentes del tensor $[\rho_{ij}]$, tomadas por separado, no son simplemente magnitudes inversas de las componentes correspondientes del tensor $[\sigma_{ij}]$, sino se hallan de la correlación

$$\rho_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \Delta^{\sigma}_{ij}}{\Delta^{\sigma}}, \tag{4.8}$$

donde Δ^{σ} es el determinante del tipo

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix},$$

Δ^{σ}_{ij} es el menor obtenido de él, tachando la i-ésima fila y la j-ésima columna. De la ecuación (4.8) se desprende que el tensor tiene otro inverso a sí mismo sólo en el caso en que todos los tres valores principales suyos sean diferentes del cero.

Propiedades ópticas de cristales. El carácter del paso de la luz a través de una sustancia está determinado por sus propiedades dieléctricas en las frecuencias ópticas. El índice de refracción de la luz $n = \sqrt{\varepsilon\mu} = c/v$, donde ε es la permeabilidad dieléctrica relativa del medio; c es la velocidad de la luz en el vacío; v es la velocidad de la luz en el medio. Para los medios dieléctricos transparentes la permeabilidad magnética del medio μ se puede considerar igual a 1 y el índice de refracción se determina por la permeabilidad dieléctrica relativa

$$n = \sqrt{\varepsilon}. \tag{4.9}$$

Para los medios isótropos la permeabilidad dieléctrica ε y, por consiguiente, el coeficiente de refracción no dependen de la dirección; $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, es decir, el vector de la inducción eléctrica $\mathbf{D}$ y el vector de intensidad del campo $\mathbf{E}$ coinciden en su dirección.

Para los medios anisótropos $D_i = \varepsilon_{ij} E_j$, donde ε_{ij} son componentes del tensor de segundo rango. La permeabilidad dieléctrica y el coeficiente de refracción del medio anisótropo dependen sustancialmente de la dirección. En el caso general, los vectores $\mathbf{D}$ y $\mathbf{E}$ no coinciden en la dirección.

De las ecuaciones de Maxwell se desprenden varias peculiaridades del paso de la luz a través de los medios ópticamente anisótropos. En el caso general, por el cristal se propagan en cualquier dirección dos ondas que son planopolarizadas en las direcciones mutuamente perpendiculares y tienen velocidades distintas. Respectivamente son diferentes, también, sus índices de refracción. Este fenómeno lleva el nombre de birrefringencia (doble refracción). Para representar la dependencia de los índices de refracción para las dos ondas que se propagan a través del cristal, en función de la dirección de su normal común de onda se construirá una superficie denominada indicatriz óptica.

Supongamos que X_1, X_2, X_3 son un sistema de coordenadas, en el cual el tensor de la permeabilidad dieléctrica $[\varepsilon_{ij}]$ tiene un aspecto diagonal:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}.$$

Esto significa que a lo largo de las direcciones de los ejes de coordenadas X_1, X_2, X_3 las direcciones de los vectores **D** y **E** coinciden. Para describir las propiedades ópticas de los cristales, es conveniente examinar el tensor de impermeabilidad dieléctrica $[\eta_{ij}]$, inverso al tensor de permeabilidad dieléctrica $[\varepsilon_{ij}]$.

La ecuación de la superficie característica del tensor $[\eta_{ij}]$ se escribirá en la forma siguiente:

$$\eta_1 x_1^2 + \eta_2 x_2^2 + \eta_3 x_3^2 = 1, \qquad (4.10)$$

donde

$$\eta_1 = 1/\varepsilon_1, \quad \eta_2 = 1/\varepsilon_2, \quad \eta_3 = 1/\varepsilon_3.$$

La ecuación (4.10) se puede escribir de otro modo:

$$\frac{x_1^2}{\varepsilon_1} + \frac{x_2^2}{\varepsilon_2} + \frac{x_3^2}{\varepsilon_3} = 1. \qquad (4.11)$$

Los coeficientes de refracción en la dirección de los ejes coordenados se llaman coeficientes de refracción principales; sus valores se hallan según las ecuaciones de tipo (4.9):

$$n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}, \quad n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}, \quad n_3 = \sqrt{\varepsilon_3}.$$

La ecuación (4.10) se puede escribir de otra manera, utilizando los coeficientes principales de refracción n_1, n_2, n_3:

$$\frac{x_1^2}{n_1^2} + \frac{x_2^2}{n_2^2} + \frac{x_3^2}{n_3^2} = 1. \qquad (4.12)$$

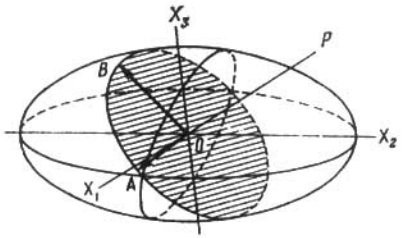


Fig. 4.5. Construcción de la indicatriz óptica.

La ecuación obtenida es ecuación de superficie llamada indicatriz óptica. En el caso general, es un elipsoide triaxil (fig. 4.5).

La indicatriz óptica tiene una propiedad importante que es la siguiente. Si de su centro trazamos una recta *OP* a lo largo de la dirección, en que se propaga el frente de onda, la sección central perpendicular a esta dirección será una elipse; los índices de refracción de ondas que se propagan a lo largo de *OP*, se determinarán por las longitudes de semiejes de esta elipse y las direcciones de los semiejes *OA* y *OB* son, respectivamente, las direcciones de oscilaciones del vector **D** para cada una de las dos ondas (fig. 4.5).

El tensor de permeabilidad dieléctrica y el tensor de impermeabilidad dieléctrica escritos en forma diagonal pueden contener tres, dos o una componente independiente para los cristales de categorías inferior y superior (véase la tabla en la pág. 49). Por eso, la indicatriz óptica de cristales triclínicos, monoclínicos y rómbicos será un elipsoide triaxial (fig. 4.6); la de cristales trigonales, hexagonales y tetragonales, un elipsoide de revolución (fig. 4.7) y la de los cúbicos, una esfera.

Si la sección central de la indicatriz óptica tiene la forma de círculo, esto significa que en la dirección perpendicular a esta sección, las velocidades de fase de dos ondas luminosas coinciden, es decir, en esta dirección no hay birrefringencia. Esta dirección se llama el eje óptico de cristal.

En los cristales de categoría media la indicatriz óptica tiene una sección central circular y, por consiguiente, un eje óptico que coincide por la dirección con el eje de simetría del orden superior.

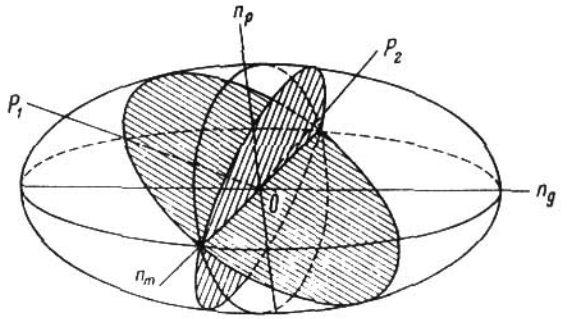


Fig. 4.6. Indicatriz óptica del cristal biaxial.

Los cristales de los sistemas trigonal, tetragonal y hexagonal son ópticamente uniaxiales.

El *elipsoide triaxial tiene dos secciones circulares* y, por consiguiente, dos ejes ópticos (fig. 4.6). Los cristales de categoría inferior son ópticamente biaxiales. El índice mayor de refracción de los cristales biaxiales se designa con n_g, el menor, con n_p y el *medio, con* n_m. *Los ejes ópticos están* en el plano, en que se encuentran los ejes de indicatriz n_g y n_p; este plano se llama plano de ejes ópticos. El ángulo agudo entre los ejes ópticos se denomina ángulo de ejes ópticos y se designa con $2V$ (*fig.* 4.8).

En los cristales uniaxiales cualquier sección central que representa una elipse tiene en calidad de uno de los semiejes el radio de sección circular (fig. 4.7). Esto significa que en cualquier dirección del cristal uniaxial se propagan dos ondas, pero sólo para una de ellas, «extraordinaria», el coeficiente de refracción depende de la dirección. Para la otra, «ordinaria», el coeficiente de refracción n_o no depende de la dirección. El índice mayor (o menor) de refracción de la onda extraordinaria está designado con n_e.

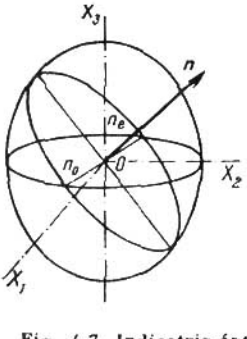


Fig. 4.7. Indicatriz óptica del cristal uniaxial.

Los cristales uniaxiales pueden

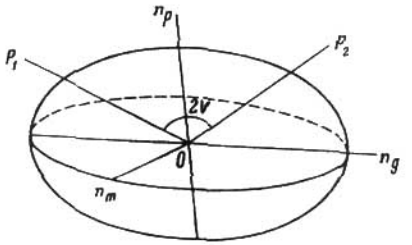


Fig. 4.8. Sección de la indicatriz de un cristal biaxial que es el plano de ejes ópticos.

ser positivos o negativos. Si $n_e > n_o$, el cristal se llama ópticamente positivo. Si $n_e < n_o$, se denomina ópticamente negativo. La diferencia entre n_e y n_o determina la magnitud de birrefringencia del cristal $\Delta n = n_e - n_o$ y es una de las constantes ópticas fundamentales de cristal.

En cristales biaxiales las dos ondas son extraordinarias: el coeficiente de refracción y la velocidad de propagación de cada una de ellas dependen de la dirección. Un cristal biaxial se considera positivo, si $n_g - n_m > n_g - n_p$, es decir, n_g sirve de bisectriz del ángulo agudo $2V$. Los cristales biaxiles, en los cuales la bisectriz del ángulo agudo es n_p, son ópticamente negativos.

La indicatriz óptica de cristales cúbicos tiene la forma de esfera. Todas sus secciones centrales son circunferencias. En los cristales cúbicos no hay birrefringencia. En lo que se refiere al paso de la luz, los cristales cúbicos se comportan como cuerpos isótropos.

Ejemplos de solución de los problemas

4.1. Hallar la magnitud y la dirección del vector de la densidad de la corriente (en el sistema de coordenadas X_1, X_2, X_3) que surge en una lámina cristalina de superficie S y de grosor d ($\sqrt{S} \gg d$), bajo la acción del campo exterior E igual a 150 V/cm y aplicado en la dirección

$$(\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2,\ 0),$$

si el tensor de electroconductibilidad específica del cristal en este sistema de coordenadas es

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 9 & -2 & 8 \\ -2 & 16 & 0 \\ 8 & 0 & 25 \end{bmatrix} \cdot 10^{-7} \text{ ohm}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}.$$

Solución. Las componentes del vector **E** (E_1, E_2, E_3) son:

$$E_1 = 150 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ V/cm}, \quad E_2 = 150 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ V/cm}, \quad E_3 = 0;$$

$$j_1 = \sigma_{11}E_1 + \sigma_{12}E_2 + \sigma_{13}E_3 =$$

$$= 9 \cdot 10^{-7} \cdot 150 \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \cdot 10^{-7} \cdot 150 \frac{\sqrt{2}}{2} = 7{,}4 \cdot 10^{-5} \text{ A/cm}^2,$$

$$j_2 = \sigma_{21}E_1 + \sigma_{22}E_2 + \sigma_{23}E_3 = -2 \cdot 10^{-7} \cdot 150 \frac{\sqrt{2}}{2} +$$

$$+ 16 \cdot 10^{-7} \cdot 150 \frac{\sqrt{2}}{2} = 14{,}7 \cdot 10^{-5} \text{ A/cm}^2,$$

$$j_3 = \sigma_{31}E_1 + \sigma_{32}E_2 + \sigma_{33}E_3 =$$

$$= 8 \cdot 10^{-7} \cdot 150 \frac{\sqrt{2}}{2} = 8{,}46 \cdot 10^{-5} \text{ A/cm},$$

$$|\mathbf{j}| = 18{,}5 \cdot 10^{-5} \text{ A/cm}^2.$$

La dirección del vector **j** se determina por los ángulos α, β y γ, los cuales el vector forma con los ejes de coordenadas. Los ángulos α, β y γ se hallan de las correlaciones

$$\cos\alpha = \frac{j_1}{|\mathbf{j}|}, \quad \cos\beta = \frac{j_2}{|\mathbf{j}|}, \quad \cos\gamma = \frac{j_3}{|\mathbf{j}|}.$$

$$\cos\alpha = 0{,}398, \quad \alpha = 66°,$$

$$\cos\beta = 0{,}797, \quad \beta = 37°,$$

$$\cos\gamma = 0{,}452, \quad \gamma = 63°.$$

4.2. ¿Con el tensor de qué tipo se describirá la dilatación lineal de sulfato de litio en el sistema ortogonal de coordenadas X_1, X_2, X_3, si: a) el eje de simetría es $2 \parallel X_3$; b) el eje de simetría es $2 \parallel X_2$?

Solución. Para los cristales de la clase 2 la operación del giro de 180° alrededor del eje 2 es una transformación idéntica. Las matrices de cosenos directores que corresponden a

esta transformación tienen la forma

$$C_{ij}(X_3,\ 180°) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$C_{ij}(X_2\ \ 180°) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Utilizada la ley de transformación de las componentes del tensor de segundo rango y los operadores de giro arriba indicados, obtenemos para el caso de $2 \parallel X_3$:

$$\alpha_{11} = \alpha_{11}, \quad \alpha_{21} = \alpha_{21},$$
$$\alpha_{22} = \alpha_{22}, \quad \alpha_{23} = -\alpha_{23},$$
$$\alpha_{33} = \alpha_{33}, \quad \alpha_{31} = -\alpha_{31}.$$

Como resultado de giro las magnitudes $\alpha_{23} = \alpha_{32}$ y $\alpha_{13} = \alpha_{31}$ llegaron a ser antiiguales. Pero las condiciones de transformación simétrica exigen que estas magnitudes conserven sus valores anteriores, lo que se cumple sólo en un caso en que son iguales a cero.

Así pues, la dilatación térmica de sulfato de litio en el sistema de coordenadas ortogonal, en que el eje X_3 coincide con el eje de simetría 2, se determina por el tensor de

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{bmatrix}.$$

De un modo análogo podemos demostrar que en el sistema $(2 \parallel X_2)$ el tensor de dilatación térmica tiene la forma

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ \alpha_{13} & 0 & \alpha_{33} \end{bmatrix}.$$

4.3. El tensor de electroconductibilidad específica de cierto cristal tiene la forma

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -3\sqrt{3} \\ 0 & -3\sqrt{3} & 13 \end{bmatrix} \cdot 10^{-7}\ \text{ohm}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}.$$

¿En qué direcciones, respecto del sistema de coordenadas, en el cual el tensor $[\sigma_{ij}]$ tiene la forma indicada en el problema, la dirección del vector de la densidad de corriente coincidirá con la dirección del campo eléctrico aplicado?

Solución. Hallar las direcciones, que se exigen en el problema, significa reducir el tensor a los ejes principales. Los ejes principales del tensor tienen una propiedad de que en los puntos de su intersección con la superficie característica, la normal a la superficie n es paralela al radio vector $\overline{OP}$ (véase la fig. 4.2). Designemos con P el punto de la superficie característica, dada por la ecuación $\sigma_{ij} \cdot x_i x_j = 1$ y con A_i, las componentes del vector $\overline{OP}$. Según la propiedad arriba indicada, el radio vector $\sigma_{ik} A_k$ es paralelo a la normal a la superficie en el punto P. Partiendo de que el radio vector y la normal deben ser paralelos, se establece la proporcionalidad de sus componentes correspondientes, es decir,

$$\sigma_{ik} A_k = \lambda A_i,$$

donde λ es constante.

La última correlación representa un sistema de tres ecuaciones lineales homogéneas en variables A_i $(i = 1, 2, 3)$, que se pueden escribir en la forma

$$\sigma_{ik} A_k - \lambda A_i = 0$$

o

$$(\sigma_{ik} - \lambda \delta_{ik}) A_k = 0,$$

donde δ_{ik} es símbolo de Kronecker.

Desarrollemos estas ecuaciones:

$$(\sigma_{11} - \lambda) A_1 + \sigma_{12} A_2 + \sigma_{13} A_3 = 0,$$
$$\sigma_{21} A_1 + (\sigma_{22} - \lambda) A_2 + \sigma_{23} A_3 = 0,$$
$$\sigma_{31} A_1 + \sigma_{32} A_2 + (\sigma_{33} - \lambda) A_3 = 0.$$

Este sistema homogéneo sirve para determinar A_1, A_2 y A_3. En este caso se buscará una solución diferente de cero (no trivial) del sistema.

Como es sabido, el sistema homogéneo tiene una solución no trivial sólo en el caso de ser su determinante igual a cero, es decir,

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \lambda \end{bmatrix} = 0,$$

lo que se escribe en la forma más breve

$$|\sigma_{ik} - \lambda\delta_{ik}| = 0.$$

Esta ecuación cúbica se llama ecuación secular de tensor. Sus tres raíces λ_1, λ_2, λ_3 nos dan tres valores posibles, para los cuales el sistema arriba indicado de ecuaciones tiene una solución diferente de cero. Cada una de las raíces determina la dirección, en la cual el radio vector de la superficie de segundo orden es paralelo a uno de los ejes principales.

En el caso dado la ecuación secular tiene la forma

$$(25 - \lambda)\,[(7 - \lambda)\,(13 - \lambda) - 27] = 0,$$

o

$$\lambda^2 - 20\lambda + 64 = 0.$$

Hallamos

$$\lambda_{2,3} = 10 \pm \sqrt{100 - 64} = 10 \pm 6,$$
$$\lambda_1 = 25, \quad \lambda_2 = 16, \quad \lambda_3 = 4.$$

Así pues, los valores de componentes diagonales del tensor de electroconductibilidad en los ejes principales son iguales a (en $\text{ohm}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$):

$$\sigma_1 = 25 \cdot 10^{-7}, \quad \sigma_2 = 16 \cdot 10^{-7}, \quad \sigma_3 = 4 \cdot 10^{-7}.$$

Encontremos ahora las direcciones de los ejes principales del tensor σ_{ij} respecto del sistema inicial de coordenadas. Supongamos que $\mathbf{A}^{(1)}$, $\mathbf{A}^{(2)}$, $\mathbf{A}^{(3)}$ son los vectores dirigidos por los ejes principales. Designemos las componentes del vector $\mathbf{A}^{(1)}$ con $A_1^{(1)}$, $A_2^{(1)}$, $A_3^{(1)}$. Para hallar dichas componentes, coloquemos en el sistema de ecuaciones lineales el valor de $\lambda = 25$ y en vez de A_1, A_2, A_3 los valores de $A_1^{(1)}$, $A_2^{(1)}$ $A_3^{(1)}$:

$$25A_1^{(1)} + 0 \cdot A_2^{(1)} + 0 \cdot A_3^{(1)} = 25A_1^{(1)},$$
$$0 \cdot A_1^{(1)} + 7A_2^{(1)} - 3\sqrt{3}A_3^{(1)} = 25A_2^{(1)},$$
$$0 \cdot A_1^{(1)} - 3\sqrt{3}A_2^{(1)} + 13A_3^{(1)} = 25A_3^{(1)}.$$

Por lo tanto, $A_1^{(1)}$ es cualquiera, mientras que $A_2^{(1)}$ y $A_3^{(1)}$ son iguales a cero. Para hallar los cosenos directores del eje principal de tensor, que corresponde al valor de λ_1, respecto de los ejes iniciales de tensor, hay que normalizar el vector $\mathbf{A}^{(1)}$; en el caso dado tendremos

$$A_1^{(1)} = \pm 1, \quad A_2^{(1)} = A_3^{(1)} = 0.$$

Haciendo lo mismo con los valores de λ_2 y λ_3, obtenemos

$$A_1^{(2)} = 0, \quad A_2^{(2)} = +\frac{1}{2}, \quad A_3^{(2)} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$A_1^{(3)} = 0, \quad A_2^{(3)} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad A_3^{(3)} = \frac{1}{2}.$$

Así pues, la tabla de los cosenos directores que determina la orientación de los ejes principales del tensor $[\sigma_{ij}]$ respecto de los ejes iniciales tiene la forma:

Ejes	X_1	X_2	X_3
X_1'	1	0	0
X_2'	0	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
X_3'	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

4.4. La medición de coeficientes de la permeabilidad *dieléctrica de resorcina ha sido* realizada en tres láminas de distinta orientación representadas en la fig. 4.9. Los resultados de la medición se dan en la tabla siguiente:

Número de sección (fig. 4.9)	S, cm²	t, cm	C, 10^{-12} F
1	3,305	0,179	5,25
2	0,784	0,255	0,92
3	2,672	0,196	3,92

Determinar las permeabilidades dieléctricas principales *de resorcina.*

Solución. Las propiedades dieléctricas de los cristales de la clase *mm* se caracterizan con los tres valores principales de permeabilidad *dieléctrica:* ε_1, ε_2 y ε_3. *Designemos con* X_1, X_2, X_3 los ejes del sistema cristalofísico de coordenadas enlazados con el cristal en un sistema estandartizado y con X_1', X_2', X_3', los ejes ortogonales enlazados con la muestra. Si se metalizan las caras de muestra paralelas al plano

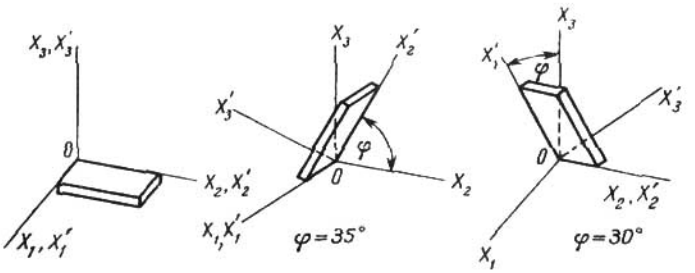


Fig. 4.9.

X_1', X_2', en este caso, midiendo la capacidad y las dimensiones del condensador cristalino obtenido, podemos calcular la magnitud de la permeabilidad dieléctrica ε_{33}' en la dirección del eje X_3' que coincide con la dirección de la normal n a la lámina.

Puesto que las componentes del tensor $[\varepsilon_{ij}]$ están enlazadas con las magnitudes medidas ε_{33}' mediante la correlación de tipo

$$\varepsilon_{33}' = n_i n_j \varepsilon_{ij},$$

las mediciones realizadas en muestras orientadas nos permiten determinar todas las componentes del tensor en el sistema cristalofísico de coordenadas X_1, X_2, X_3.

Los valores de ε_{33}' se hallan, partiendo de la medición de la capacidad de las láminas indicadas $C = \varepsilon_{33}' \cdot S/(4\pi t)$, de donde se saca $\varepsilon_{33}' = 4\pi t C/S$ (t es espesor, S es superficie de láminas). Es evidente que, midiendo la capacidad de la primera lámina de sección Z, obtenemos el valor:

$$\varepsilon_3 = 3{,}22.$$

La orientación de la normal a la segunda lámina respecto de los ejes cristalofísicos (véase la fig. 4.9) se determina así:

$$n_1 = 0, \quad n_2 = -\operatorname{sen}\varphi, \quad n_3 = \cos\varphi, \quad \varphi = 35°,$$

y su permeabilidad dieléctrica

$$\varepsilon_{33}'' = \varepsilon_2 \operatorname{sen}^2\varphi + \varepsilon_3 \cos^2\varphi; \quad \varepsilon_{33}'' = 3{,}39.$$

De un modo análogo para la tercera lámina

$$n_1 = -\cos\varphi, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = \operatorname{sen}\varphi, \quad \varphi = 30°,$$

$$\varepsilon_{33}''' = \varepsilon_1 \cos^2\varphi + \varepsilon_3 \operatorname{sen}^2\varphi.$$

Considerando en las últimas ecuaciones $\varepsilon_3 = 3{,}22$ y resolviéndolas respecto de ε_1 y ε_2, obtenemos

$$\varepsilon_1 = 3{,}26, \quad \varepsilon_2 = 3{,}74.$$

4.5. Se ha determinado que la magnitud de coeficiente de dilatación térmica de un cristal monoclínico a lo largo de la dirección [010] que es el eje de simetría de segundo orden constituye $41 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}. Las mediciones subsiguientes han sido realizadas en el plano de (010). Resulta que la magnitud del coeficiente de dilatación térmica en dos direcciones mutuamente perpendiculares en el plano (010) es igual a $32 \cdot 10^{-6}$ y $15 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}, y a lo largo de la dirección que forma el ángulo de 45° con las direcciones indicadas es de $16 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}. Determinar los coeficientes del tensor $[\alpha_{ij}]$ en el sistema estandartizado y también los valores de sus coeficientes principales.

Solución. En los cristales monoclínicos uno de los ejes principales del tensor (en el sistema estandartizado el eje X_2) coincide con la dirección [010] que es el eje de simetría 2 o la normal al plano de simetría. Dos ejes principales restantes del tensor pueden tener, respecto a esta dirección, orientaciones distintas, debido a lo cual el tensor $[\alpha_{ij}]$ de este cristal incluye cuatro componentes independientes. Hagamos coincidir el X_2 con la dirección [010]; las direcciones mutuamente perpendiculares en el plano (010), a lo largo de las cuales han sido obtenidas las magnitudes de dilatación térmica $32 \cdot 10^{-6}$ y $15 \cdot 10^{-6}$ grad $^{-1}$, respectivamente, con los ejes X_3 y X_1. Elegido así el sistema de coordenadas,

$$\alpha_{11} = 15 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1},$$
$$\alpha_{22} = 41 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1},$$
$$\alpha_{33} = 32 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1},$$

y el coeficiente de dilatación térmica a lo largo de la dirección que forma el ángulo de 45° con los ejes X_3 y X_1, lo hallamos mediante la correlación

$$\alpha_n = \alpha_{ij} n_i n_j = \frac{1}{2} (\alpha_{11} + \alpha_{33} + 2\alpha_{13}).$$

Por consiguiente, $\alpha_{13} = -7{,}5 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}.

Por lo tanto, el tensor de dilatación térmica de este cristal en el sistema de coordenadas X_1, X_2, X_3 tiene la

forma

$$\alpha_{ij} = \begin{bmatrix} 15 & 0 & -7{,}5 \\ 0 & 41 & 0 \\ -7{,}5 & 0 & 32 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}\ \text{grad}^{-1}.$$

Hallamos los coeficientes principales de dilatación térmica, utilizando el método indicado en el problema 4.3. Estos son: $\alpha_1 = 34{,}8 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}, $\alpha_2 = 41 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}, $\alpha_3 = 12{,}2 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}.

Al pasar a los ejes principales, disminuiremos el número de las componentes de tensor hasta tres, pero en este caso es necesario indicar la constante adicional (el ángulo del giro alrededor del eje X_2) que designa la orientación de los ejes X_1', X_2', X_3', en los cuales el tensor $[\alpha_{ij}]$ tiene una forma diagonal, respecto de los ejes X_1, X_2, X_3.

4.6. *La medición de coeficientes de dilatación térmica* de un cristal triclínico se ha realizado en una muestra que tiene la forma de cubo. Los coeficientes han sido medidos a lo largo de las aristas de cubo y de sus tres diagonales volumétricas. Demostrar cómo, según los datos de medición, pueden ser calculadas las componentes del tensor de dilatación térmica.

Solución. La dilatación térmica de cristales triclínicos se caracteriza, en el caso general, por el tensor de la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix}.$$

La simetría de cristales triclínicos no impone restricciones algunas a la orientación de la superficie característica del tensor de segundo rango, y la orientación de los ejes principales del tensor de coeficientes de dilatación térmica en el cristal no se sabe de antemano. Por eso, elegimos los ejes X_1, X_2, X_3 de un modo arbitrario, por ejemplo, hacémoslos coincidir con las aristas del cubo.

En este caso, los cosenos directores de las direcciones indicadas en las condiciones del problema, a lo largo de las cuales han sido medidos los coeficientes de dilatación térmica, serán los siguientes:

$$(1, 0, 0);\quad (0, 1, 0);\quad (0, 0, 1);\quad (1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3});$$
$$(-1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3});\quad (1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3},\ -1/\sqrt{3}).$$

Designemos las magnitudes de los coeficientes de dilatación térmica, medidas a lo largo de las direcciones enumeradas, respectivamente con $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$, $\alpha^{(4)}$, $\alpha^{(5)}$, $\alpha^{(6)}$. En el sistema de coordenadas elegido, enlazado con las aristas del cubo,

$$\alpha^{(1)} = \alpha_{11}, \quad \alpha^{(2)} = \alpha_{22}, \quad \alpha^{(3)} = \alpha_{33}.$$

Utilizando las ecuaciones de la forma $\alpha_n = \alpha_{ij} n_i n_j$, en que α_n son los coeficientes de dilatación térmica en la dirección de n, obtenemos

$$\alpha^{(4)} = \frac{1}{3}(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} + 2\alpha_{12} + 2\alpha_{23} + 2\alpha_{31}),$$

$$\alpha^{(5)} = \frac{1}{3}(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} - 2\alpha_{12} + 2\alpha_{23} - 2\alpha_{31}),$$

$$\alpha^{(6)} = \frac{1}{3}\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} + 2\alpha_{12} - 2\alpha_{23} - 2\alpha_{31}).$$

Transformamos estas ecuaciones

$$\alpha^{(4)} - \frac{1}{3}(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}) = \frac{2}{3}(\alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{31}),$$

$$\alpha^{(5)} - \frac{1}{3}(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}) = \frac{2}{3}(-\alpha_{12} + \alpha_{23} - \alpha_{31}),$$

$$\alpha^{(6)} - \frac{1}{3}(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}) = \frac{2}{3}(\alpha_{12} - \alpha_{23} - \alpha_{31}).$$

De éstas hallamos

$$-\frac{4}{3}\alpha_{31} = (\alpha^{(5)} + \alpha^{(6)}) - \frac{2}{3}(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}),$$

$$\alpha_{31} = \frac{1}{2}(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}) - \frac{3}{4}(\alpha^{(5)} + \alpha^{(6)}).$$

Análogamente,

$$\alpha_{23} = \frac{3}{4}(\alpha^{(4)} + \alpha^{(5)}) - \frac{1}{2}(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}),$$

$$\alpha_{12} = \frac{3}{4}(\alpha^{(4)} + \alpha^{(6)}) - \frac{1}{2}(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}).$$

De este modo determinamos todas las componentes independientes del tensor de dilatación térmica de un cristal triclínico en el sistema de coordenadas X_1, X_2, X_3, enlazado con las aristas de la muestra cortada en forma de cubo.

Desde luego, los ejes X_1, X_2, X_3 no son principales para el tensor $[\alpha_{ij}]$. En el sistema de sus ejes principales X_1', X_2',

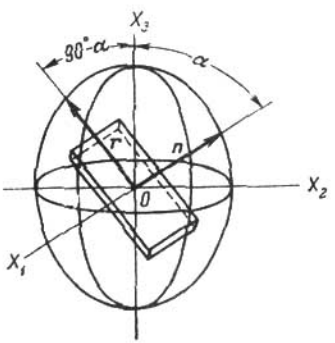


Fig. 4.10.

X_3' el tensor α_{ij}'] tiene solamente tres coeficientes principales de dilatación: α_1', α_2', α_3'. Pero para una descripción completa de la dilatación térmica de cristal hay que saber no sólo los valores absolutos de los coeficientes de dilatación térmica a lo largo de los ejes principales X_1', X_2', X_3', sino también la orientación de estos ejes con respecto a los ejes fijos X_1, X_2, X_3. *Es evidente que para eso* hay que indicar tres magnitudes más que caracterizan la orientación de los ejes X_1', X_2', X_3' respecto de los ejes X_1, X_2, X_3.

4.7. Determinar la magnitud de birrefringencia (doble refracción) de una lámina de cuarzo, orientada con su normal de un modo arbitrario respecto del eje X_3 del sistema cristalofísico de coordenadas (fig. 4.10). ¿De qué modo hay que cortar la lámina para que ésta a) tenga la birrefringencia máxima; b) no tenga birrefringencia?

Solución. La simetría del cuarzo es 32, por lo tanto, éste es un cristal uniaxial y tiene dos índices principales de refracción, n_o y n_e. El índice de refracción de onda ordinaria n_o no depende de la dirección. El índice de refracción de onda extraordinaria depende de la dirección, variándose de n_o hasta n_e, y, para una dirección arbitraria, se designa como n_e'.

El valor de n_e' puede ser encontrado como el radio vector de la indicatriz óptica que se encuentra en un plano con la normal a la lámina y perpendicular a la misma (véase la fig. 4.10). Así, por ejemplo, si la normal a la lámina junto con el eje X_3 forma un ángulo arbitrario α, en este caso, el radio vector de indicatriz óptica que nos interesa, igual por su valor absoluto al coeficiente de refracción de la onda extraordinaria que se propaga en la lámina perpendicularmente a su superficie, forma con el eje X_3 el ángulo $(90° - \alpha)$. Puesto que la indicatriz óptica de cristales uniaxiales tiene el eje de simetría del orden infinito que coincide con el

eje cristalofísico X_3 (véase la fig. 4.7), se puede colocar el vector r y el vector de la normal a la lámina n en el plano X_2X_3; el vector r tendrá las coordenadas $(0, r_2, r_3)$.

Escribamos la ecuación de la elipse que representa una sección de la indicatriz óptica por el plano X_2X_3:

$$\frac{x_2^2}{n_o^2} + \frac{x_3^2}{n_e^2} = 1. \qquad (4.13)$$

Puesto que $(90° - \alpha)$ es el ángulo comprendido entre el vector r y el eje X_3, en este caso

$$x_2 = r \operatorname{sen}(90° - \alpha) = r \cos \alpha,$$
$$x_3 = r \cos(90° - \alpha) = r \operatorname{sen} \alpha.$$

Pongamos los valores de x_2 y x_3 en la ecuación (4.13):

$$\frac{r^2 \cos^2 \alpha}{n_o^2} + \frac{r^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{n_e^2} = 1,$$

de donde

$$r^2 = \frac{1}{\dfrac{\cos^2 \alpha}{n_o^2} + \dfrac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{n_e^2}} = \frac{n_o^2 \cdot n_e^2}{n_e^2 \cos^2 \alpha + n_o^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha};$$

por lo tanto,

$$n_e' = n_o n_e \sqrt{\frac{1}{n_e^2 \cos^2 \alpha + n_o^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}}.$$

El valor de la birrefringencia en esta dirección

$$\Delta n' = n_e' - n_o' = n_o \left(n_e \sqrt{\frac{1}{n_e^2 \cos^2 \alpha - n \operatorname{sen}^2 \alpha}} - 1 \right). \qquad (4.14)$$

La magnitud de $\Delta n'$ alcanza su valor máximo, siendo $\alpha = 90°$. Por consiguiente, la birrefringencia máxima la tendrá una lámina, cuya normal forma el ángulo de 90° con el eje X_3. Cuando $\alpha = 0$, $\Delta n = 0$, es decir, la lámina, cuya normal es paralela al eje X_3, no tiene birrefringencia.

4.8. Al medir los índices de refracción de una lámina cristalina con un cristal-refractómetro, resulta que un índice de refracción es constante para todos los giros de semiesfera y es igual a 1,646 y el otro varía de 1,642 a 1,646. Determinar el signo óptico de cristal y la orientación de la lámina respecto del eje óptico.

Solución. Puesto que el índice constante de refracción es el índice de refracción del rayo ordinario y el valor que

difiere más de n_o corresponde a n_e que es el índice de refracción del rayo extraordinario, $n_o = 1{,}646$, $n_e = 1{,}642$. En el caso dado, $n_o > n_e$, por consiguiente, la lámina está hecha de un cristal ópticamente negativo.

Si representamos la distribución de las magnitudes de los índices de refracción en el plano de la lámina, será evidente que en el diagrama hay dos puntos en que los índices de refracción de los rayos ordinario y extraordinario son iguales. Esto significa que el eje óptico está en el plano de la lámina. Por consiguiente, la lámina está cortada de un cristal ópticamente negativo, uniaxial, paralelamente al eje óptico.

4.9. Los índices principales de refracción de la muscovita son $n_g = 1{,}601$, $n_m = 1{,}598$, $n_p = 1{,}563$. Determinar el ángulo entre los ejes ópticos.

Solución. La muscovita es un cristal ópticamente biaxial, por consiguiente, su indicatriz óptica es un elipsoide triaxial:

$$\frac{x_1^2}{n_p^2} + \frac{x_2^2}{n_m^2} + \frac{x_3^2}{n_g^2} = 1.$$

El elipsoide triaxial tiene dos secciones circulares y dos ejes ópticos con el ángulo $2V$ entre ellos; el ángulo entre uno de los ejes ópticos y el eje principal de la indicatriz óptica X_2 es igual a V.

La sección de indicatriz óptica perpendicular al eje X_2 se escribirá en la forma

$$\frac{x_1^2}{n_p^2} + \frac{x_3^2}{n_g^2} = 1. \qquad (4.15)$$

El radio vector de la indicatriz óptica, igual a la magnitud absoluta de n_m, se expresará así:

$$n_m = \frac{x_1}{\cos V} = \frac{x_3}{\operatorname{sen} V}.$$

Colocando los valores de x_1 y x_3 en la ecuación (4.15), obtenemos

$$\frac{n_m^2 \cos^2 V}{n_p^2} + \frac{n_m^2 \operatorname{sen}^2 V}{n_g^2} = 1. \qquad (4.16)$$

Por otro lado, podemos escribir

$$\operatorname{sen}^2 V + \cos^2 V = 1. \qquad (4.17)$$

Igualando los primeros miembros de las ecuaciones (4.16) y (4.17) y dividiendo la expresión obtenida en $\cos^2 V$,

tenemos:

$$\frac{n_m^2}{n_p^2} + \frac{n_m^2}{n_g^2} \operatorname{tg}^2 V = 1 + \operatorname{tg}^2 V,$$

$$\operatorname{tg}^2 V \left(1 - \frac{n_m^2}{n_g^2}\right) = \frac{n_m^2}{n_p^2} - 1,$$

$$\operatorname{tg}^2 V = \frac{(n_m^2 - n_p^2)\, n_g^2}{(n_g^2 - n_m^2)\, n_p^2},$$

$$\operatorname{tg} V = \pm \frac{n_g}{n_p} \sqrt{\frac{n_m^2 - n_p^2}{n_g^2 - n_m^2}}. \qquad (4.18)$$

Colocando en la ecuación (4.18) los valores de índices de refracción de muscovita

$$n_g = 1{,}601, \quad n_m = 1{,}598, \quad n_p = 1{,}563,$$

obtenemos

$$V = 16°20', \quad 2V = 32°40'.$$

Problemas

4.10. *Hallar la magnitud del coeficiente de dilatación* térmica en la dirección de la normal al plano de simetría en un cristal de KDP.

4.11. Determinar la magnitud de la permeabilidad dieléctrica relativa del cuarzo en la dirección de la bisectriz del ángulo entre los ejes de simetría de tercer y segundo órdenes y en la dirección de la bisectriz del ángulo entre los ejes de simetría de segundo orden. Explicar el resultado obtenido.

4.12. ¿Qué permeabilidad dieléctrica relativa ε' y ε^t tiene la sección L de la sal de Seignette (véase la fig. 2.4)?

4.13. Hallar la magnitud de la resistencia específica del cristal en la dirección de $(1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3})$ respecto del sistema de coordenadas, en que el tensor de electroconductibilidad específica de este cristal tiene la forma

$$\begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -3\sqrt{3} \\ 0 & -3\sqrt{3} & 13 \end{bmatrix} \cdot 10^{-7}\ \text{ohm}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}.$$

4.14. Hallar las impermeabilidades dieléctricas principales relativas η_{ij} y la magnitud de la impermeabilidad dieléctri-

ca relativa del cuarzo en dirección de bisectriz del ángulo entre ejes de simetría de segundo y de tercer órdenes y la bisectriz del ángulo entre los ejes de simetría de segundo orden.

4.15. En un condensador plano está encajada una lámina de yeso con la superficie de $1 \times 2{,}5$ cm^2 y de 0,4 cm de espesor, cortada de modo que la normal a su superficie forma con los ejes cristalofísicos los ángulos:

$$\angle X_1ON = 90°, \quad \angle X_2ON = 30°, \quad \angle X_3ON = 60°.$$

Hallar la capacidad de este condensador.

4.16. Calcular la carga sumaria que surge en la superficie de una lámina de aragonita de dimensiones $2 \times 4 \times 0{,}2$ cm^3, cortada perpendicularmente a la dirección de $(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ si la lámina se encuentra en un campo eléctrico de intensidad de 400 V/cm. La dirección del campo coincide con la dirección de la normal a la lámina.

4.17. Determinar el tensor de permeabilidad dieléctrica del cuarzo:

a) en el sistema de coordenadas que ha girado en 30° alrededor del eje X_1 en el sentido del movimiento de las agujas del reloj respecto del sistema cristalofísico;

b) en el sistema de coordenadas girado alrededor del eje X_1 *del sistema cristalofísico al ángulo de 30° en el sentido* contrario al de las agujas del reloj;

c) en el sistema de coordenadas, girado alrededor del eje X_3 del sistema cristalofísico al ángulo de 60° en la *dirección* del movimiento de las agujas del reloj y en la dirección contraria.

Explicar los resultados recibidos.

4.18. El tensor de permeabilidad dieléctrica relativa de cierto cristal de simetría $\bar{4}2m$ en el sistema cristalofísico de coordenadas tiene la forma

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 89 & 0 & 0 \\ 0 & 89 & 0 \\ 0 & 0 & 173 \end{bmatrix}.$$

¿Qué forma tomará este tensor en el sistema de coordenadas, enlazado con el inicial mediante el giro de 45° alrededor *del eje* X_3, *es decir, en el segundo sistema* cristalofísico?

4.19. Hallar la expresión para la energía de un cristal rómbico polarizado, si el campo eléctrico está aplicado en las direcciones: a) [100], b) [010].

4.20. A menudo, con fines prácticos, necesitamos unas láminas cristalinas, cuyo espesor cambie lo menos posible durante el calentamiento. ¿Cómo hay que cortar la lámina de cristal monoclínico, que posee el valor mínimo de dilatación térmica, *si la dilatación lineal de este cristal en el sistema* de ejes ortogonales X_1, X_2, X_3 se describe con el tensor

$$\begin{bmatrix} 10 & -5 & 0 \\ -5 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}\ \text{grad}^{-1}\ ?$$

4.21. ¿Bajo qué ángulo al eje de simetría de tercer orden debe estar cortada la lámina de calcita para que no experimente una expansión térmica durante su calentamiento hasta 40° C?

4.22. ¿En qué direcciones los cristales de grafito no experimentan una expansión durante el calentamiento?

4.23. La permeabilidad dieléctrica de un cristal monoclínico en el sistema ortogonal de coordenadas X_1, X_2, X_3 se representa con el tensor

$$\begin{bmatrix} 10 & 5 & 0 \\ 5 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}.$$

¿Cómo hay que cortar una lámina cristalina de dimensiones fijas que tenga la capacidad máxima?

4.24. Determinar la orientación de los ejes principales del tensor de expansión térmica de un cristal monoclínico respecto de los ejes ortogonales X_1, X_2, X_3, en los cuales la expansión térmica de cristal se describe con el tensor

$$\begin{bmatrix} 15 & 0 & -7{,}5 \\ 0 & 41 & 0 \\ -7{,}5 & 0 & 32 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}\ \text{grad}^{-1}.$$

4.25. Deducir la ecuación de la superficie de índices de permeabilidad dieléctrica de un cristal triclínico.

4.26. Determinar el valor de birrefringencia de una lámina de cuarzo cortada paralelamente a una cara del romboedro, la cual forma con la cara del prisma un ángulo de 142°.

4.27. ¿Qué grosor mínimo d debe tener una lámina de mica para que pueda servir en calidad de la lámina «de

1/4λ»*) para la luz de sodio, si para esta luz los índices de refracción de las ondas, que van perpendicularmente a la lámina, son, respectivamente, iguales a

$$n_1 = 1{,}5941,$$
$$n_2 = 1{,}5997,$$
$$\lambda_{Na} = 5893 \text{ Å}?$$

4.28. Hallar el espesor mínimo d de una lámina de cuarzo cortada paralelamente al eje óptico, para que la luz planopolarizada incidente salga de ella polarizada circularmente ($\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ cm).

4.29. Al medir el índice de refracción de una lámina de oligoclasa (feldespato), obtenida mediante un cizallamiento en el plano de crucero (010), están hallados: el índice constante de refracción igual a 1,545 y el variable, con los valores extremos 1,543 y 1,539.

Determinar el signo óptico y el valor máximo de birrefringencia.

4.30. Determinar el signo óptico de un cristal biaxial, si

$$n_3 - n_1 = 0{,}036,$$
$$n_3 - n_2 = 0{,}019.$$

4.31. Una luz planopolarizada incide sobre una lámina fina de cuarzo cortada paralelamente al eje óptico. Determinar el espesor mínimo del cristal, con el cual la diferencia de fases de dos rayos es igual a 30° para la luz de longitud de onda $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ cm.

4.32. ¿Qué espesor debe tener una lámina de yeso, orientada paralelamente al plano (010), para que pueda servir como lámina «de cuarto de onda» para la luz de la línea verde de mercurio ($\lambda = 5460$Å)? Los índices de refracción de los rayos que se propagan perpendicularmente a la lámina de yeso (010) son

$$n_p = 1{,}532 \text{ y } n_g = 1{,}522.$$

---

*) La lámina «de 1/4λ» o «de cuarto de onda», se llama una lámina birrefringente cuyo espesor está elegido de manera que la diferencia de recorridos de rayos que han salido de esta lámina es igual a $\lambda/4$, es decir,

$$d(n_0 - n_e) = \lambda/4.$$

Las láminas «de cuarto de onda» se hacen, por regla general, de mica, de yeso o de celofán.

4.33. Hallar el espesor mínimo de una lámina de calcita cortada paralelamente al eje óptico a condición de que la luz planopolarizada incidente salga polarizada circularmente ($\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ cm).

4.34. ¿Qué espesor debe tener una lámina de muscovita (mica), cortada por el plano (001), para que pueda servir en calidad de lámina «de cuarto de onda» para la luz de sodio ($\lambda_{Na} = 5893$ Å), si los índices de refracción de muscovita $n_p = 1{,}601$, $n_m = 1{,}596$, $n_g = 1{,}563$ y la bisectriz de ángulo agudo entre los ejes ópticos se sitúa perpendicularmente al plano (001)?

4.35. ¿Qué espesor debe tener una lámina de calcita tomada por crucero $(10\bar{1}1)$ para poder preparar de ella un compensador con diferencia de recorridos $R = 1100$ nm ($n_c' = 1{,}566$).

4.36. Una lámina de cuarzo cortada paralelamente al eje óptico está colocada entre nicoles cruzados. El eje óptico de lámina forma el ángulo de 45° con las direcciones principales de nicoles. Calcular el espesor mínimo de lámina con el cual una línea de hidrógeno ($\lambda = 6568$ Å) está muy debilitada, y la otra ($\lambda = 4102$ Å) tiene la intensidad máxima. La magnitud de birrefringencia de cuarzo es $\Delta n = 0{,}009$.

4.37. Un haz luminoso paralelo incide normalmente sobre una lámina de calcita cortada de manera que la normal a la lámina forma con la dirección [0001] un ángulo de 40°. Determinar la diferencia de recorridos de la onda ordinaria y la extraordinaria que han pasado a través de la lámina. El grosor de lámina es de 2 mm.

4.38. Determinar la diferencia de recorridos de los rayos ordinario y extraordinario que van perpendicularmente a una lámina de calcita cizallada por el crucero. El grosor de lámina es $d = 2$ mm.

4.39. Determinar el ángulo máximo entre la dirección del rayo y la de la normal de onda en el cuarzo.

§ 5. TENSIONES Y DEFORMACIONES EN CRISTALES. EXPANSIÓN TÉRMICA

El estado de tensión homogénea de un cuerpo en cierto punto puede ser representado por nueve componentes del tensor de tensiones en un sistema de coordenadas elegido

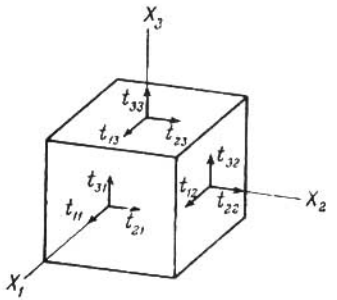


Fig. 5.1. Sentido físico de las componentes del tensor de tensiones.

arbitrariamente

$$t_{ij} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}.$$

En este caso están aceptadas las siguientes designaciones: el primer índice de la componente de tensor de tensiones se refiere a la dirección de la fuerza; el segundo, a la dirección de la normal al área elemental en que actúa la fuerza (fig. 5.1). Por ejemplo, la tensión t_{32} significa la componente de fuerza en la dirección del eje X_3, que actúa en el área elemental, perpendicular al eje X_2. Es evidente que t_{ii}, es decir, las llamadas componentes normales o diagonales del tensor de tensiones son tensiones de tracción (compresión) en la dirección de los ejes coordenados; t_{ij} $(i \neq j)$ son tensiones de desplazamiento o tangenciales, que se encuentran en los planos de aquellas áreas elementales en las cuales actúan. De la condición del equilibrio estático de momentos respecto de los ejes coordenados X_1, X_2 y X_3 se desprende la igualdad de componentes no diagonales del tensor $[t_{ij}]$:

$$t_{12} = t_{21}, \quad t_{23} = t_{32}, \quad t_{31} = t_{13}. \tag{5.1}$$

Por lo tanto, el estado de tensión se describe totalmente con seis componentes independientes del tensor de tensiones: tres normales t_{11}, t_{22} y t_{33} y tres tangenciales t_{12}, t_{13} y t_{23}.

Se puede demostrar que la correlación (5.1) sigue siendo justa incluso en los casos en que la tensión no es homogénea, cuando el cuerpo no está en equilibrio estático y cuando están presentes las fuerzas volumétricas, pero faltan momentos volumétricos.

Signos de tensiones. Las tensiones normales y tangenciales se consideran positivas cuando actúan en las direcciones indicadas en la fig. 5.1. Por eso resulta que las tensiones normales correspondientes a las tensiones de tracción son positivas. Sin embargo, durante el análisis de los efectos piezoeléctrico y piezoóptico se utiliza la regla inversa de

signos: en este caso se consideran positivas las tensiones de compresión.

Ejes principales del tensor de tensiones y superficie de tensiones. El tensor de tensiones es simétrico y puede ser reducido a los ejes principales:

$$\begin{bmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 \end{bmatrix},$$

donde t_1, t_2, t_3 son las llamadas tensiones principales.

Los ejes principales del tensor de tensiones tienen una peculiaridad de que en las áreas perpendiculares a ellos las componentes de la tensión tangencial están ausentes.

La superficie característica de segundo orden que corresponde al tensor $[t_{ij}]$ se llama la superficie de tensiones. Su ecuación tiene la forma

$$t_{ij}x_i x_j = 1 \tag{5.2}$$

o, al pasar a los ejes principales,

$$t_1 x_1^2 + t_2 x_2^2 + t_3 x_3^2 = 1.$$

Puesto que cada una de las tensiones t_1, t_2, t_3 puede ser tanto positiva como negativa, la superficie de tensiones es elipsoide o hiperboloide efectivo o ficticio. La dirección de la fuerza resultante $\mathbf{P}\,\delta S$ que actúa en el elemento de superficie δS se puede hallar mediante la propiedad del radio vector y la normal a la superficie de tensiones (fig. 5.2). La longitud del vector r determina la tensión normal t_n que actúa en el elemento de superficie δS, representado en la fig. 5.2, o sea,

$$t_n = 1/r^2.$$

Tensiones completa, normal, tangencial, media y efectiva. Para resolver los problemas prácticos, a menudo es necesario determinar las siguientes magnitudes:

a) La tensión completa t_r que actúa en un área elemental con la normal n (fig. 5.3):

$$t_r = \sqrt{t_{ri}^2}, \tag{5.3}$$

donde

$$t_{ri} = t_{ij}n_j.$$

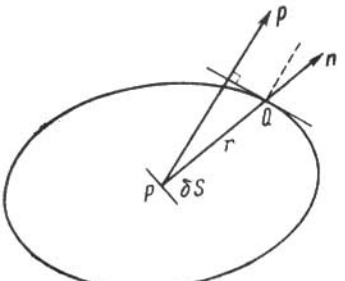


Fig. 5.2. Determinación de la dirección de la fuerza resultante transmitida a través de la superficie δS mediante el elipsoide característico de tensiones.

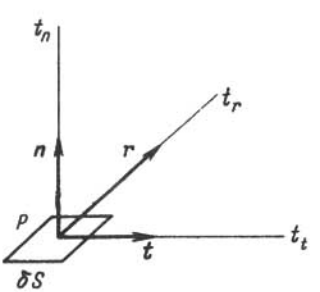


Fig. 5.3. Tensiones que actúan en un área de orientación arbitraria: t_r es la tensión completa; t_t es la tensión tangencial; t_n es la tensión normal.

b) La tensión normal t_n que actúa en el área elemental con la misma normal:

$$t_n = t_{ij} n_i n_j. \tag{5.4}$$

c) La tensión tangencial t_t en el plano de la misma área elemental:

$$t_t = \sqrt{t_r^2 - t_n^2}. \tag{5.5}$$

d) La tensión tangencial máxima $t_t^{\text{máx}}$ que actúa en el plano X_1X_2:

$$t_t^{\text{máx}} = \left[\left(\frac{t_{11} - t_{22}}{2} \right)^2 + t_{12}^2 \right]^{1/2}. \tag{5.6}$$

Las correlaciones análogas son justas para las tensiones $t_t^{\text{máx}}$ que actúan en los planos X_1X_3 y X_2X_3.

e) La tensión media t_m:

$$t_m = \frac{t_{11} + t_{22} + t_{33}}{3}. \tag{5.7}$$

f) La tensión efectiva o generalizada:

$$\bar{t}^2 = \frac{1}{2} [(t_{11} - t_{22})^2 + (t_{22} - t_{33})^2 + (t_{33} - t_{11})^2] + \\ + 3 (t_{12}^2 + t_{23}^2 + t_{31}^2). \tag{5.8}$$

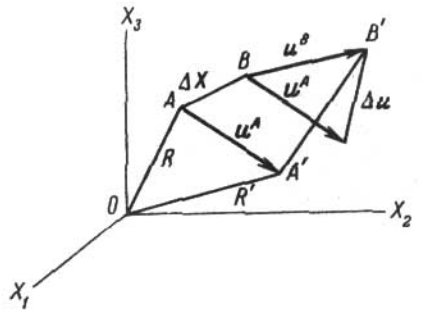


Fig. 5.4. Desplazamiento de los puntos de un cuerpo durante la *deformación.*

Tensor de tensiones como ejemplo de un tensor campestre. El tensor de tensiones es próximo, por su sentido, a la fuerza aplicada al cristal. Por eso, el tensor de tensiones no depende de la simetría del cristal. Este tensor tiene sentido no solamente para cristales, sino también para cuerpos isótropos que se encuentran en estado de tensión. A diferencia de tensores materiales que describen las propiedades físicas de un cristal y están enlazados con su simetría, semejante tensor se llama campestre.

Análisis de deformaciones. Para un cuerpo deformado no son de importancia sustancial los desplazamientos absolutos, sino los desplazamientos de sus puntos entre sí.

Para describir la deformación de un cuerpo enlacemos con él un sistema rectangular de coordenadas X_1, X_2, X_3.

Supongamos que durante la deformación la posición del origen de coordenadas no cambia y todos los demás puntos obtienen cierto desplazamiento. Si el punto A (fig. 5.4) ocupa la posición A' y el punto B que está apartado de A a una distancia $\Delta \mathbf{X}$ ocupa la posición B', en este caso los puntos A y B obtendrán los desplazamientos expresados por los vectores $\mathbf{u}^A$ y $\mathbf{u}^B$, respectivamente.

El vector $\mathbf{u}$ se llama vector de desplazamiento; $u_i = (x_i' - x_i)$, *donde* $i = 1, 2, 3$; x_i *son coordenadas del punto* de cuerpo antes de la deformación, x_i' son sus coordenadas después de la deformación.

Puesto que durante las deformaciones es sustancial el desplazamiento mutuo de los puntos de un cuerpo, es nece-

sario examinar el vector $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^B - \mathbf{u}^A$ que representa un incremento de los desplazamientos de los puntos apartados inicialmente a la distancia $\Delta \mathbf{X}$.

Si $u_i = x_i' - x_i$ es constante para todas las i y para todos los puntos del cuerpo, $\Delta \mathbf{u} = 0$ y las deformaciones del cuerpo están ausentes, es decir, tiene lugar un traslado del cuerpo paralelamente a sí mismo. Durante las deformaciones los desplazamientos para diferentes puntos serán distintos.

Deformaciones homogéneas se llaman las deformaciones, para las cuales las componentes del vector de desplazamiento son funciones lineales de las coordenadas:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= e_{11}x_1 + e_{12}x_2 + e_{13}x_3, \\ u_2 &= e_{21}x_1 + e_{22}x_2 + e_{23}x_3, \\ u_3 &= e_{31}x_1 + e_{32}x_2 + e_{33}x_3. \end{aligned}\right\} \tag{5.9}$$

Los valores de e_{ij} no dependen de la magnitud de desplazamiento.

Para el incremento de los desplazamientos, en el caso de una deformación homogénea, podemos escribir

$$\left.\begin{aligned} \Delta u_1 &= e_{11}\Delta X_1 + e_{12}\Delta X_2 + e_{13}\Delta X_3, \\ \Delta u_2 &= e_{21}\Delta X_1 + e_{22}\Delta X_2 + e_{23}\Delta X_3, \\ \Delta u_3 &= e_{31}\Delta X_1 + e_{32}\Delta X_2 + e_{33}\Delta X_3. \end{aligned}\right\} \tag{5.10}$$

Las expresiones (5.10) determinan la interacción vector-vectorial y las nueve magnitudes de e_{ij} constituyen un tensor de segundo rango:

$$e_{ij} = \frac{du_i}{dx_j} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix}. \tag{5.11}$$

El tensor $[e_{ij}]$ se denomina tensor de desplazamientos pequeños. En el caso general, este tensor no es simétrico. Siempre puede ser representado en forma de una suma de tensores simétrico y antisimétrico:

$$e_{ij} = r_{ij} + \omega_{ij}, \tag{5.12}$$

donde

$$r_{ij} = 1/2\,(e_{ij} + e_{ji}) = r_{ji}\,. \tag{5.13}$$

Es evidente que el tensor $[r_{ij}]$ es simétrico. El tensor $[\omega_{ij}]$ es antisimétrico:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(e_{ij} - e_{ji}) = -\omega_{ji}. \qquad (5.14)$$

Describe la rotación del cuerpo como entero alrededor de un eje inmóvil sin desplazar sus puntos entre sí.

El tensor $[r_{ij}]$ representa un tensor de deformaciones *propiamente dicho.*

La variación relativa del volumen del cuerpo

$$\frac{\Delta V}{V} = r_{ii} = r_{11} + r_{22} + r_{33}. \qquad (5.15)$$

Las componentes diagonales del tensor $[r_{ij}]$: r_{11}, r_{22}, r_{33} son deformaciones de compresión o de tracción de los elementos de longitud unitaria a lo largo de los ejes de coordenadas (fig. 5.5). Las componentes no diagonales: r_{23}, r_{31}, r_{12} determinan las deformaciones de desplazamiento, siendo, por ejemplo, la magnitud $2r_{32}$ igual a la variación del ángulo entre dos elementos situados antes de la deformación paralelamente a los ejes X_2 y X_3 (fig. 5.6). Las componentes r_{13} y r_{12} tienen sentido análogo.

Signos de deformaciones. Está admitido considerar las deformaciones de tracción como positivas. Las deformaciones de desplazamiento se consideran positivas, si en el proceso de deformación disminuye el ángulo entre los ele-

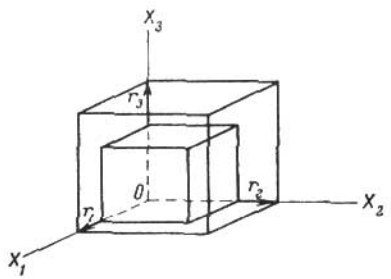


Fig. 5.5. Deformación de un cubo de dimensiones unitarias, de aristas paralelas a los ejes principales de la deformación.

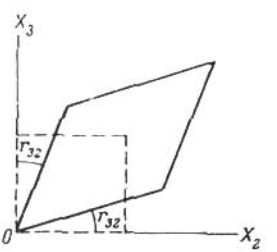


Fig. 5.6. Giro de los segmentos paralelos a los ejes de coordenadas en el caso de deformaciones de desplazamiento.

mentos lineales destacados en el cuerpo no deformado paralelamente a las direcciones positivas de los ejes coordenados correspondientes. Por ejemplo, la deformación $2r_{32}$ se considera positiva, si el ángulo entre los elementos lineales, paralelos a las direcciones positivas de los ejes X_2 y X_3, disminuye (véase la fig. 5.6).

Ejes principales del tensor de deformaciones y superficie característica del tensor de deformaciones. Puesto que el tensor de deformaciones es un tensor simétrico, se puede reducirlo a los ejes principales:

$$\begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}.$$

Esto significa que, siendo cualquiera la deformación del cuerpo, se puede elegir un sistema de coordenadas tal, en que la deformación del cuerpo puede ser representada sólo por compresiones y tracciones en tres direcciones perpendiculares entre sí, sin desplazamientos.

La deformación puede ser representada por una superficie característica de deformaciones, la ecuación de la cual tiene la forma

$$r_{ij}x_ix_j = 1. \tag{5.16}$$

Esta superficie puede ser elipsoide o hiperboloide tanto efectivo como ficticio.

Si la deformación es homogénea, el desplazamiento debido a la deformación se determina así:

$$u_i = r_{ij}x_j. \tag{5.17}$$

La dirección del vector **u** y el valor de r para una dirección dada cualquiera **I** pueden ser encontrados mediante la propiedad del radio vector y la normal a la superficie de deformaciones (fig. 5.7). El alargamiento en una dirección arbitraria **I** se expresa en la forma

$$r = r_{ij}l_il_j. \tag{5.18}$$

Elipsoide de deformaciones. Para imaginar más claramente la deformación de un cuerpo es conveniente utilizar el llamado elipsoide de deformaciones. Es una superficie, a la cual pasará la esfera de radio unitario, destacada en el cuerpo no deformado, después de la deformación de este cuerpo.

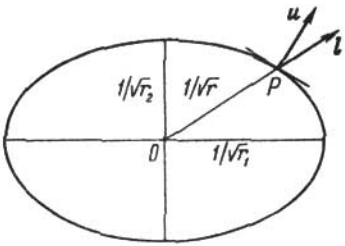


Fig. 5.7. Determinación de la dirección del desplazamiento de un punto por medio de la superficie característica de las deformaciones.

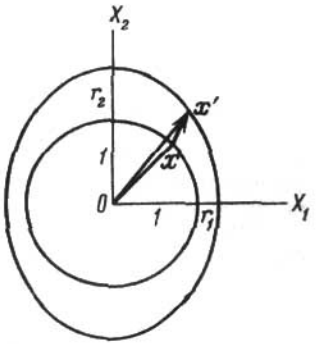


Fig. 5.8. Deformación de la *esfera del radio unitario.*

La ecuación de la esfera del radio unitario es

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Fijemos el radio vector $\overline{Ox}$ de la esfera. Sus coordenadas son (x_1, x_2, x_3). Después de la deformación del cuerpo descrita con el tensor

$$\begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix},$$

este radio vector se convierte en el vector $\overline{Ox'}$ con las coordenadas (x_1', x_2', x_3') (fig. 5.8). Las componentes del vector $\overline{Ox'}$ están enlazadas con las del vector $\overline{Ox}$ mediante las ecuaciones:

$$x_1' = x_1(1 + r_1),$$
$$x_2' = x_2(1 + r_2),$$
$$x_3' = x_3(1 + r_3).$$

Al tomar de estas ecuaciones los valores de las componentes del vector $\overline{Ox}$ y al colocarlos en la ecuación de la esfera

del radio unitario, obtendremos la expresión

$$\frac{x_1'^2}{(1+r_1)^2}+\frac{x_2'^2}{(1+r_2)^2}+\frac{x_3'^2}{(1+r_3)^2}=1. \qquad (5.19)$$

Precisamente ésta es la ecuación del elipsoide de deformaciones. El elipsoide de deformaciones demuestra de un modo muy claro la distribución de las deformaciones en un cuerpo: por ejemplo, las direcciones de las deformaciones máximas, mínimas, etc.

Tensor de deformaciones y principio de Neumann. Las deformaciones que describen la reacción de un cristal a una influencia exterior no son su propiedad física. Por lo tanto, el tensor de deformaciones, igual que el tensor de tensiones, no está sujeto al principio de Neumann, a excepción de las deformaciones originadas por el cambio de la temperatura (expansión térmica) de cristales.

Expansión térmica. Variándose uniformemente la temperatura de un cristal en la magnitud ΔT, éste experimenta una deformación homogénea que se describe con la ecuación

$$r_{ij}=\alpha_{ij}\Delta T, \qquad (5.20)$$

donde α_{ij} son coeficientes de expansión térmica y que son componentes del tensor simétrico de segundo rango. Evidentemente existen tres coeficientes principales de expansión térmica: α_1, α_2, α_3, y las direcciones principales correspondientes, la deformación a lo largo de las cuales se puede hallar mediante las correlaciones

$$r_1=\alpha_1\Delta T, \quad r_2=\alpha_2\Delta T, \quad r_3=\alpha_3\Delta T,$$

donde α_1, α_2, α_3 son los coeficientes principales de expansión.

Ejemplos de solución de los problemas

5.1. Una tensión mecánica uniaxial de compresión t está aplicada a una lámina de sección L de ADP (véase la fig. 2.4). en la dirección de la normal a sus caras activas. ¿Qué forma tendrá el tensor de tensiones en el sistema de coordenadas cristalofísico?

Solución. Hagamos coincidir la dirección de compresión n (n_1 n_2 n_3) con el eje X_3' del sistema de coordenadas nuevo rayado, enlazado con las aristas de la lámina de sección L. En este caso, el tensor que caracteriza el estado de tensión

de la lámina cristalina en los ejes rayados se escribirá en la forma siguiente:

$$t'_{kl} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t \end{bmatrix},$$

donde $t'_{33} = -t$.

Para pasar al sistema de coordenadas cristalofísico, se recurrirá a la ley de transformación de las componentes del tensor de segundo rango (4.2a)

$$t_{ij} = C_{3i} C_{3j} t'_{33} = n_i n_j (-t).$$

Entonces

$$t_{11} = -n_1^2 t, \quad t_{22} = -n_2^2 t, \quad t_{33} = -n_3^2 t,$$
$$t_{12} = t_{21} = -n_1 n_2 t, \quad t_{13} = t_{31} = -n_1 n_3 t,$$
$$t_{23} = t_{32} = -n_2 n_3 t.$$

El estado de tensión del cristal en el sistema de coordenadas cristalofísico tiene la forma

$$\begin{bmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & n_3^2 \end{bmatrix} \cdot (-t).$$

Así pues, la tensión uniaxial determinada por una dirección arbitraria n (n_1, n_2, n_3) respecto del sistema de coordenadas cristalofísico, en este sistema es representado por un tensor de tensiones de forma común que tiene tanto las componentes normales como las de desplazamiento.

5.2. El estado de tensión de un cristal de cuarzo en el sistema de coordenadas cristalofísico se plantea del modo siguiente:

$$t_{11} = 1 \text{ kgf/cm}^2, \quad t_{22} = 2 \text{ kgf/cm}^2, \quad t_{33} = 3 \text{ kgf/cm}^2,$$
$$t_{12} = -0{,}5 \text{ kgf/cm}^2.$$

Determinar: a) la magnitud de las tensiones normales extremas, b) orientación de los planos que experimentan las tensiones normales máxima y mínima.

Solución. a) Es evidente que el estado de tensión dado se representará con el tensor

$$\begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{kgf/cm}^2.$$

Para hallar los valores extremos de las tensiones normales, es necesario determinar las tensiones principales, es decir, reducir el tensor a los ejes principales. Una de las tensiones principales se determina en seguida por la forma del tensor dado, por ejemplo,

$$t_3 = 3 \text{ kgf/cm}^2.$$

Determinemos las tensiones principales t_1 y t_2:

$$\begin{bmatrix} 1-t & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 2-t \end{bmatrix} = 0,$$

$$t^2 - 3t + 1{,}75 = 0, \quad t_{1,2} = 1{,}5 \pm 0{,}71.$$

De este modo, $t_1 = 2{,}21$ kgf/cm^2, $t_2 = 0{,}79$ kgf/cm^2.

Por consiguiente, la magnitud máxima de una tensión normal, que experimenta el cristal, es igual a 3 kgf/cm^2 y el valor mínimo de la tensión normal es igual a 0,792 kgf/cm^2.

b) Para contestar a la segunda pregunta del problema, hay que hallar los cosenos directores de las tensiones principales respecto de los ejes cristalofísicos iniciales; utilizado el método descrito en el problema 4.3, tenemos:

$$n_1^{(1)} = 0{,}925, \quad n_2^{(1)} = -0{,}384, \quad n_3^{(1)} = 0,$$
$$n_1^{(2)} = 0{,}384, \quad n_2^{(2)} = 0{,}925, \quad n_3^{(2)} = 0,$$
$$n_1^{(3)} = n_2^{(3)} = 0, \quad n_3^{(3)} = 1.$$

De este modo, la tensión normal máxima de 3 kgf/cm^2, la experimenta el plano, cuya normal tiene los cosenos directores (0, 0, 1). La tensión normal mínima de 0,79 kgf/cm^2 la experimenta el plano, cuya normal tiene los cosenos directores (0,384; 0,925; 0).

5.3. La aplicación de un campo eléctrico a las caras *activas de una lámina cristalina de sección X* de la sal de Seignette (véase la fig. 2.3) origina en esta lámina una deformación de desplazamiento en el plano X_2X_3. ¿Cómo hay que dirigir las aristas de la lámina de sección X, para que el estado indicado de deformaciones represente las deformaciones de compresión-tracción en la dirección de sus aristas?

Solución. Es evidente que el estado de deformación de la *lámina de sección X en el sistema* de los ejes enlazados

con sus aristas se describe con el tensor

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{23} \\ 0 & r_{23} & 0 \end{bmatrix}.$$

Las deformaciones de tracción y de compresión representan componentes diagonales del tensor $[r_{ij}]$, por eso para *hallarlas* hay que reducir el tensor de las deformaciones a los ejes principales.

La reducción del tensor dado a los ejes principales se realiza por medio de un giro de 45° alrededor del eje X_1; en este caso el tensor $[r_{ij}]$ toma la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & -r \end{bmatrix},$$

donde $|r| = |r_{33}|$.

Por consiguiente, para obtener las deformaciones de compresión—tracción mediante una lámina de sección X de la sal de Seignette, aplicando un campo eléctrico a sus caras activas, esta lámina debe estar cortada de modo que sus aristas formen con los ejes X_2 y X_3 ángulos iguales a 45°. Tales láminas se llaman secciones X de 45°.

5.4. Durante una deformación elástica de una muestra cristalina que tiene la forma de un cubo de dimensiones $1 \times 1 \times 1$ cm^3, sus puntos experimentan los desplazamientos siguientes:

$$u_1 = (4x_1 + 3x_2 - 5x_3) \cdot 10^{-4}\ cm,$$
$$u_2 = (7x_1 - 13x_2 + 4x_3) \cdot 10^{-4}\ \text{cm},$$
$$u_3 = (9x_1 - 2x_2 + 4x_3) \cdot 10^{-4}\ \text{cm}.$$

Encontrar la variación de los ángulos entre las aristas del cubo y el cambio de su volumen durante la deformación.

Solución. El tensor de los desplazamientos pequeños, el tensor de las deformaciones y el tensor de las rotaciones

son iguales, respectivamente, a:

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 7 & -13 & 4 \\ 9 & -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}, \quad r_{ij} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 5 & -13 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4},$$

$$\omega_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 2 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}.$$

La variación de los ángulos entre las aristas del cubo de dimensiones unitarias se caracteriza con los valores no diagonales de las componentes del tensor r_{ij}, es decir, las componentes r_{12}, r_{23}, r_{13}. El ángulo entre las aristas paralelas a los ejes X_1 y X_2 será igual a $1/2\pi - 2r_{12}$. La variación de este ángulo es igual a la magnitud $2r_{12}$.

Las variaciones de los ángulos entre las aristas paralelas a los ejes X_1 y X_2, X_1 y X_3, X_2 y X_3 antes de la deformación son iguales, respectivamente, a:

$$2r_{12} = 3{,}42', \quad 2r_{13} = 1{,}2', \quad 2r_{23} = 0{,}68'.$$

La variación relativa del volumen $\Delta V/V$ se halla como la suma de las componentes diagonales del tensor $[r_{ij}]$, es decir, es igual a $-5 \cdot 10^{-4}$.

5.5. El estado de la deformación elástica del cristal se plantea en la forma:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 0{,}001 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}004 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}008 \end{bmatrix}; \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 0{,}0001 & 0 & 0 \\ 0 & +0{,}001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determinar el tipo de la superficie característica de las deformaciones y, también, la superficie en la cual se transforma la esfera del radio unitario después de las deformaciones que se caracterizan con los tensores dados.

Solución. a) El tensor de las deformaciones está reducido a los ejes principales de deformaciones, por consiguiente, la ecuación de la superficie característica de deformaciones que le corresponde, tiene la forma

$$0{,}001x_1^2 - 0{,}004x_2^2 + 0{,}008x_3^2 = 1.$$

Esta superficie de deformaciones es un hiperboloide de una hoja. Destaquemos en el cristal no deformado la esfera del

radio unitario. Su ecuación tendrá la forma

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Las coordenadas corrientes de la superficie nueva obtenida de la esfera después de la deformación se hallan mediante las correlaciones

$$x_1' = x_1 + u_1, \quad x_2' = x_2 + u_2, \quad x_3' = x_3 + u_3.$$

Puesto que $u_i = r_{ij}x_j$, en este caso $u_1 = r_1x_1$,

$$u_2 = r_2x_2, \quad u_3 = r_3x_3,$$

$$x_1' = x_1(1 + r_1), \quad x_2' = x_2(1 + r_2), \quad x_3' = x_3(1 + r_3).$$

La ecuación de la superficie obtenida después de la deformación de la esfera tiene la forma

$$\frac{x_1'^2}{(1+r_1)^2} + \frac{x_2'^2}{(1+r_2)^2} + \frac{x_3'^2}{(1+r_3)^2} = 1.$$

Para el caso dado

$$\frac{x_1'^2}{(1+0{,}001)^2} + \frac{x_2'^2}{(1-0{,}004)^2} + \frac{x_3'^2}{(1-0{,}008)^2} = 1.$$

Es evidente que la esfera destacada en el cristal no deformado, después de la deformación se ha convertido en un elipsoide triaxial con los semiejes 1,001; 0,996 y 0,992.

b) La ecuación de la superficie característica de las deformaciones tiene en este caso la forma $0{,}0001x_1^2 + 0{,}001x_2^2 = 1$ o $x_1^2 + 10x_2^2 = 10^4$, es decir, la superficie de las deformaciones tiene la forma de un cilindro con sección elíptica.

Destaquemos en el cristal no deformado la esfera unitaria

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Después de la deformación la esfera unitaria se convierte en la superficie

$$\frac{x_1'^2}{(1{,}0001)^2} + \frac{x_2'^2}{(1{,}001)^2} + \frac{x_3'^2}{1} = 1,$$

que es un elipsoide triaxial con los semiejes 1,0001; 1,001 y 1.

5.6. Para encontrar los coeficientes de expansión térmica de los cristales de etilendiamintartrato (EDT), han sido realizadas las mediciones del coeficiente de expansión térmica α en cuatro direcciones diferentes.

Dirección	α, 10^{-6} grad^{-1}
Paralela a la dirección [010] que es el eje de simetría de segundo orden	20,3
En dos direcciones perpendiculares entre sí que están en el plano (010): $\mathbf{n}^{(1)}$ $\mathbf{n}^{(2)}$	 80 0
En la dirección $\mathbf{n}^{(3)}$, que también está en el plano (010) y forma el ángulo de 45° con las direcciones $\mathbf{n}^{(1)}$ y $\mathbf{n}^{(2)}$	8

Determinar los coeficientes que caracterizan la dilatación lineal de los cristales de EDT durante el calentamiento, y también los valores de los coeficientes máximo y mínimo de expansión térmica. ¿Qué conclusión previa podemos sacar acerca del comportamiento de los cristales de EDT en las condiciones de un calentamiento no uniforme?

Solución. La expansión térmica de los cristales de la clase 2 se caracteriza con cuatro coeficientes (véase el problema 4.2). Elijamos los ejes coordenados: el eje X_2 hagamos coincidir con la dirección [010], los ejes X_3 y X_1 están en el plano (010). Una de las direcciones en el plano (010), por ejemplo, la dirección a lo largo de la cual la magnitud de la expansión térmica resulta ser igual a $80 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}, designémosla con X_3 y la dirección correspondiente a la magnitud cero de la expansión térmica, con X_1.

Entonces, en el sistema de coordenadas elegido

$$\alpha_{11} = 0, \quad \alpha_{22} = 20{,}03 \cdot 10^{-6}\ \text{grad}^{-1}, \quad \alpha_{33} = 80 \cdot 10^{-6}\ \text{grad}^{-1}.$$

Para hallar el coeficiente α_{13} utilizamos la magnitud de la expansión térmica medida a lo largo de la dirección que forma el ángulo de 45° con las direcciones de los ejes X_1 y X_3.

Designemos esta dirección con l; entonces sus cosenos directores respecto de los ejes X_1, X_2 y X_3 serán igual a $1/\sqrt{2}$, 0 y $1/\sqrt{2}$, y la expansión térmica en la dirección l se hallará de la ecuación $\alpha_l = \alpha_{ij} l_i l_j$ que en el caso dado

toma la forma

$$\alpha_l = \frac{1}{2}(\alpha_{11} + \alpha_{33} + 2\alpha_{13}).$$

Colocando en la última correlación los valores de α_l, α_{11} y α_{33}, obtenemos

$$8 \cdot 10^{-6} = 1/2\ (80 + 2\alpha_{13}) \cdot 10^{-6}\ \text{grad}^{-1},$$

de donde

$$\alpha_{13} = -32 \cdot 10^{-6}\ \text{grad}^{-1}.$$

Por consiguiente, los coeficientes que caracterizan la expansión térmica de los cristales de EDT en el sistema de coordenadas elegido X_1, X_2, X_3, son iguales a (en 10^{-6} grad^{-1}):

$$\alpha_{11} = 0, \quad \alpha_{22} = 20{,}03,$$
$$\alpha_{33} = 80, \quad \alpha_{13} = -32.$$

Para determinar el coeficiente máximo y el mínimo es necesario encontrar los valores de los coeficientes principales α_1, α_2 y α_3, es decir, reducir el tensor

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -32 \\ 0 & 20{,}03 & 0 \\ -32 & 0 & 80 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}\ \text{grad}^{-1}$$

a los ejes principales. Es evidente que el eje X_2 es el eje principal del tensor dado; de aquí $\alpha_2 = 20{,}03 \times \times 10^{-6}$ grad^{-1}.

Los valores de los coeficientes α_1 y α_3 se determinan según el método descrito en el problema 4.3. De este modo, los coeficientes principales de la expansión térmica de los cristales de EDT son iguales a (en 10^{-6} grad^{-1}):

$$\alpha_1 = 91{,}2 \text{ (el mayor)},$$
$$\alpha_2 = 20{,}03,$$
$$\alpha_3 = -11{,}2 \text{ (el menor)}.$$

Los valores de los coeficientes de expansión térmica de EDT ponen de manifiesto el carácter singular de la expansión térmica de este cristal: en una dirección el cristal tiene un coeficiente positivo muy alto de dilatación lineia ($91{,}2 \cdot 10^{-6}$), y en la dirección perpendicular, un coeficiente negativo pequeño ($-11{,}2 \cdot 10^{-6}$). Por eso, el cristal

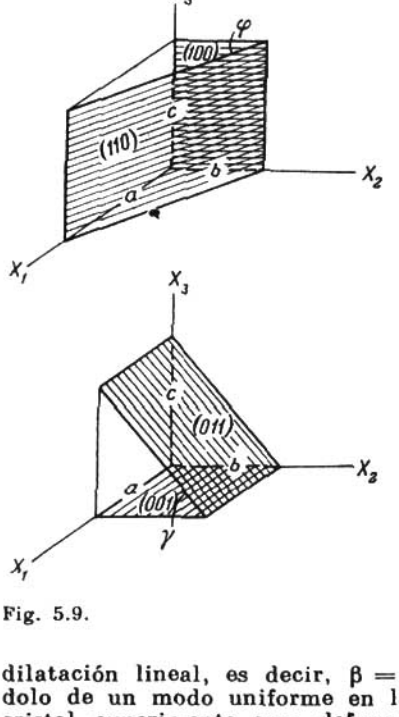


Fig. 5.9.

resulta ser frágil en las condiciones de un calentamiento o enfriamiento brusco no uniforme, lo que dificulta su utilización.

5.7. Los parámetros de una célula de aragonita, $a : b : c = 0{,}6224 : 1 : 0{,}7206$. Calentándola de 0 a 100° C, el ángulo φ entre las caras (100) y (110) disminuye en 1,14′, y el ángulo γ entre las caras (001) y (011) aumenta en 2,84′ (fig. 5.9). El coeficiente de dilatación cúbica de este cristal es igual a $62{,}0 \cdot 10^{-6}\,\text{grad}^{-1}$. Calcular tres coeficientes principales de dilatación térmica.

Solución. La expansión térmica de los cristales de aragonita se describe con los tres coeficientes principales de dilatación lineal $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ y el coeficiente de dilatación cúbica β se halla como la suma de los coeficientes de la dilatación lineal, es decir, $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$. Calentándolo de un modo uniforme en la temperatura de ΔT, el cristal experimenta una deformación homogénea que se describe con la ecuación $r_{ij} = \alpha_{ij} \Delta T$. Expresemos la variación de los ángulos entre los planos cristalográficos dados mediante los parámetros de la célula y los coeficientes de *dilatación lineal de aragonita. Escribamos:*

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{c}{b}.$$

Elevándose la temperatura del cristal en ΔT, los parámetros de su célula cambian. Designemos con letras y rayas los valores de los parámetros de la célula y de los ángulos entre los planos indicados del cristal, variándose su tem-

peratura en ΔT; entonces

$$a' = a\,(1 + \alpha_1 \Delta T),$$
$$b' = b\,(1 + \alpha_2 \Delta T),$$
$$c' = c\,(1 + \alpha_3 \Delta T).$$

Los ángulos entre los planos (100) y (110), (001) y (011) cambian también y su valor se puede encontrar por medio de las correlaciones siguientes:

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{a'}{b'} = \frac{(1+\alpha_1 \Delta T)\, a}{(1+\alpha_2 \Delta T)\, b} = \frac{(1+\alpha_1 \Delta T)}{(1+\alpha_2 \Delta T)} \times$$
$$\times \operatorname{tg} \varphi = [1 + \Delta T\,(\alpha_1 - \alpha_2)] \operatorname{tg} \varphi.$$

Por otro lado,

$$\varphi' = \varphi + \Delta\varphi,$$
$$\operatorname{tg} \varphi' = \operatorname{tg}(\varphi + \Delta\varphi) = \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \Delta\varphi.$$

Igualando los segundos miembros de las ecuaciones para $\operatorname{tg} \varphi'$, obtenemos

$$\Delta T\,(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{1}{\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi} \Delta\varphi.$$

Puesto que

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \text{entonces} \quad \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{a^2 + b^2}{ab} \frac{\Delta\varphi}{\Delta T}.$$

De un modo análogo, considerando $\operatorname{tg} \gamma = c/b$,

$$\operatorname{tg} \gamma' = \frac{c'}{b'} = \frac{(1+\alpha_3 \Delta T)\, c}{(1+\alpha_2 \Delta T)\, b} = [1 + \Delta T\,(\alpha_3 - \alpha_2)] \operatorname{tg} \gamma.$$

De aquí

$$(\alpha_3 - \alpha_2)\, \Delta T = \frac{1}{\operatorname{sen} \gamma \cos \gamma} \Delta\gamma = \frac{c^2 + b^2}{bc} \Delta\gamma.$$

Así pues, hemos recibido las siguientes correlaciones:

$$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,$$
$$(\alpha_1 - \alpha_2)\, \Delta T = \frac{a^2 + b^2}{ab} \Delta\varphi, \quad (\alpha_3 - \alpha_2)\, \Delta T = \frac{c^2 + b^2}{bc} \Delta\gamma.$$

Teniendo en cuenta que $a : b : c = 0{,}6224 : 1 : 0{,}7206$, $\Delta\varphi = -1{,}14'$, $\Delta\gamma = 2{,}84''$, $\beta = 62 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}, y resolviendo el sistema de ecuaciones antedichas respecto de α_1,

α_2 y α_3, obtenemos

$$\alpha_1 = 9{,}9 \cdot 10^{-6}\ \text{grad}^{-1},$$
$$\alpha_2 = 17{,}3 \cdot 10^{-6}\ \text{grad}^{-1},$$
$$\alpha_3 = 34{,}7 \cdot 10^{-6}\ \text{grad}^{-1}.$$

Problemas

5.8. El estado de tensión de una lámina cristalina de sección L de la sal de Seignette (véase la fig. 2.4) se representa en el sistema de coordenadas cristalofísico con el tensor

$$\begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 75 \end{bmatrix} \text{kgf/cm}^2.$$

Determinar el valor de las tensiones completa, normal y tangencial que actúan en la lámina.

5.9. El estado de tensión de una muestra cristalina se representa con el tensor

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \cdot 10^2\ \text{kgf/cm}^2.$$

Hallar el sistema de coordenadas, en que el estado de tensión dado puede ser considerado sólo como un sistema de compresiones y tracciones.

5.10. El estado de tensión de un cristal se representa con el tensor que tiene la forma

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 \\ t_{12} & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} \end{bmatrix}.$$

Hallar la tensión normal y la tangencial que actúan en el plano, la normal al cual está en el plano X_1X_2 y forma el ángulo α con el eje X_1.

5.11. El estado de tensión general en un punto de una muestra cristalina se designa con las siguientes componentes del tensor de tensiones (en kgf/cm^2):

$$t_{11} = 50,\ t_{22} = 0,\ t_{33} = -30,\ t_{12} = 50,\ t_{23} = -75,$$
$$t_{31} = 80.$$

Determinar el valor de las tensiones principales, normales y tangenciales.

5.12. Durante la aserradura de los cristales de esfalerita en probetas en ellos han surgido las tensiones que se describen con el tensor

$$\begin{bmatrix} -10 & -60 & 0 \\ -60 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix} \cdot \text{kgf/cm}^2.$$

Hallar la magnitud de la presión media y la de la tensión tangencial máxima que experimenta una probeta cristalina.

5.13. Siendo pequeña la deformación de un cuerpo, cada su punto experimenta desplazamientos pequeños:

$$u_1 = (8x_1 + 3x_2 - 5x_3) \cdot 10^{-5} \text{ cm},$$
$$u_2 = (7x_1 + 3x_2 + 4x_3) \cdot 10^{-5} \text{ cm},$$
$$u_3 = (x_1 - 8x_2 + x_3) \cdot 10^{-5} \text{ cm}.$$

Determinar el tensor de la deformación del cuerpo $[r_{ij}]$ y el tensor de rotaciones $[\omega_{ij}]$. Hallar la dilatación volumétrica del cuerpo.

5.14. Siendo pequeña la deformación elástica de una probeta cristalina que tiene la forma de cubo de dimensiones $1 \times 1 \times 1$ cm^3, sus puntos experimentan los desplazamientos:

$$u_1 = (4x_1 + 3x_2 - 5x_3) \cdot 10^{-4} \text{ cm},$$
$$u_2 = (7x_1 - 13x_2 + 4x_3) \cdot 10^{-4} \text{ cm},$$
$$u_3 = (9x_1 - 2x_2 + 4x_3) \cdot 10^{-4} \text{ cm}.$$

Hallar el cambio de los ángulos entre las aristas de la probeta y la variación de su volumen durante la deformación.

5.15. El tensor de la deformación elástica del cristal se representa en la forma

$$\begin{bmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 1 & 6 & 0 \\ -5 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}.$$

Determinar el tensor de deformaciones $[r_{ij}]$, el de rotaciones $[\omega_{ij}]$ y los valores de las deformaciones principales.

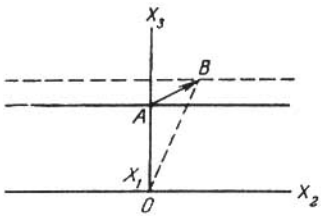


Fig. 5.10. Dilatación térmica de una lámina planoparalela.

5.16. Un cristal está deformado de modo que su deformación se describe con el tensor

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 0 & 12 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}.$$

Encontrar tales tres direcciones mutuamente perpendiculares en el cristal que sigan siendo perpendiculares también después de la deformación.

5.17. Como resultado de un efecto piezoeléctrico inverso, una probeta cristalina que representa una lámina de sección L, de la sal de Seignette (véase la fig. 2.4), experimenta una deformación relativa de tracción por su espesor que es igual a 0,005. ¿Cómo podemos representar la deformación de la probeta en el sistema de coordenadas cristalofísico?

5.18. Un cubo pequeño de la sal de roca, orientado con sus aristas a lo largo de las direcciones de tipo [100], experimenta una deformación plana de modo que el alargamiento relativo a lo largo de la arista [100] es de $4 \cdot 10^{-5}$, a lo largo de la arista [010], $12 \cdot 10^{-5}$. Hallar el alargamiento relativo en las direcciones [100], [111], [121].

5.19. Una lámina planoparalela cortada de un cristal triclínico, al ser calentada $\Delta T°$, se deforma de modo que el punto A pasa al punto B (fig. 5.10). Expresar el ángulo AOB por medio de los coeficientes de expansión térmica.

5.20. Determinar el tipo de la superficie a la cual pasa la esfera del radio unitario destacada en el cristal rómbico, al calentarlo $\Delta t°$.

5.21. Hallar los coeficientes de la expansión térmica de un cristal hexagonal, si es sabido el coeficiente de dilatación cúbica β y el cambio de la relación de sus parámetros c/a durante el calentamiento.

§ 6. PROPIEDADES PIEZOELÉCTRICAS DE CRISTALES

Efecto piezoeléctrico directo. El efecto piezoeléctrico directo comprende un grupo de fenómenos durante los cuales las tensiones mecánicas o deformaciones originan en los cristales

una polarización eléctrica (campo eléctrico) directamente proporcional a las magnitudes indicadas, siendo las magnitudes mecánicas y eléctricas enlazadas linealmente entre sí. El efecto piezoeléctrico directo se describe con las ecuaciones de cuatro tipos:

$$P_i = d_{ijk} t_{jk}, \tag{6.1}$$

$$P_i = e_{ijk} r_{jk}, \tag{6.2}$$

$$E_i = -g_{ijk} t_{jk}, \tag{6.3}$$

$$E_i = -h_{ijk} r_{jk} \quad (i, j, k = 1, 2, 3), \tag{6.4}$$

donde P_i y E_i son, respectivamente, las componentes del vector de polarización eléctrica y del vector de intensidad del campo eléctrico; t_{jk} y r_{jk} son, respectivamente, las componentes del tensor de tensiones mecánicas y del tensor de deformaciones; d_{ijk}, e_{ijk}, g_{ijk}, h_{ijk} son coeficientes piezoeléctricos que forman el tensor de tercer rango. Esto significa que al pasar del sistema de coordenadas X_1, X_2, X_3 al sistema de X'_1, X'_2, X'_3, los coeficientes piezoeléctricos, por ejemplo, los coeficientes d_{ijk}, se transforman según la ley

$$d'_{qlm} = C_{qi} C_{lj} C_{mk} d_{ijk}. \tag{6.5}$$

Los coeficientes d_{ijk} suelen llamarlos módulos piezoeléctricos o piezomódulos.

Número de piezomódulos independientes. Representación matricial. El número de componentes del tensor de tercer rango es 27, pero debido a la simetría de los tensores de tensiones mecánicas y deformaciones

$$t_{ij} = t_{ji}, \quad r_{ij} = r_{ji} \tag{6.6}$$

los tensores de los coeficientes piezoeléctricos resultan ser simétricos respecto de las permutaciones de los dos últimos índices, es decir, se cumplen las correlaciones

$$d_{ijk} = d_{ikj}. \tag{6.7}$$

Esto disminuye el número de los coeficientes piezoeléctricos independientes hasta 18 y nos da la posibilidad de escribir las ecuaciones del efecto piezoeléctrico en una forma matricial más breve. Con este fin se introduce un índice en lugar de dos para las componentes del tensor de tensiones:

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{12} & t_{22} & t_{23} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} t_1 & t_6 & t_5 \\ t_6 & t_2 & t_4 \\ t_5 & t_4 & t_3 \end{bmatrix},$$

y también para las componentes del tensor de las deformaciones:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{12} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} r_1 & \frac{1}{2}r_6 & \frac{1}{2}r_5 \\ \frac{1}{2}r_6 & r_2 & \frac{1}{2}r_4 \\ \frac{1}{2}r_5 & \frac{1}{2}r_4 & r_3 \end{bmatrix}.$$

Las ecuaciones del *piezoefecto directo en representación* matricial toman la forma

$$P_i = d_{il}t_l, \tag{6.8}$$

$$P_i = e_{il}r_l, \tag{6.9}$$

$$E_i = -g_{il}t_l, \tag{6.10}$$

$$E_i = -h_{il}r_l \quad (i = 1, 2, 3;\ l = 1, 2, \ldots, 6). \tag{6.11}$$

Los coeficientes d_{il}, e_{il}, g_{il}, h_{il} forman las matrices que se componen de tres filas y seis columnas.

Los coeficientes piezoeléctricos en representaciones tensoriales y matriciales están enlazados con las correlaciones determinadas, por ejemplo, para los piezomódulos d:

$$\left.\begin{aligned} d_{ijk} &= d_{in}, \quad \text{cuando } n = 1, 2, 3, \quad i = 1, 2, 3; \\ 2d_{ijk} &= d_{in}, \quad \text{cuando } n = 4, 5, 6, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}\right\} \tag{6.12}$$

Se debe tener en cuenta que resolviendo los problemas, que exigen pasar de un sistema de coordenadas a otro, es necesario utilizar la representación no matricial, sino tensorial.

Exigencias que impone la simetría de cristales. La simetría de cristales impone restricciones a la existencia del efecto piezoeléctrico y a la forma de matriz de piezomódulos. Los cristales centrosimétricos no pueden ser piezoeléctricos. La forma (d_{ij}) de la matriz de los cristales no centrosimétricos *que no pertenecen a los sistemas trigonal* y hexagonal, puede ser obtenida, utilizando el método de comprobación directa (método de Fumi). Este método consiste en que las componentes del tensor de tercer rango, durante el paso al nuevo sistema de coordenadas, se transforman analógicamente *al producto de tres coordenadas correspondientes* de un punto arbitrario, a saber,

$$x_i'x_j'x_k' = C_{il}C_{jm}C_{kn}x_lx_mx_n. \tag{6.13}$$

Así, por ejemplo, si el cristal posee el eje de simetría de segundo orden, paralelo al eje X_3, la transformación de los ejes de coordenadas se produce del modo siguiente:

$$X_1 \to -X_1',\ X_2 \to -X_2',\ X_3 \to X_3',$$

o de forma más concisa:

$$1 \to -1,\ 2 \to -2,\ \ 3 \to 3.$$

Para este caso d_{122} se transforma así:

$$d_{122} \to -d'_{122}, \tag{6.14}$$

puesto que $X_1X_2^2 \to -X_1'X_2'^2$. Pero como el eje de segundo orden, paralelo al eje X_3, es una operación de simetría, el piezomódulo d_{122} con tal transformación de coordenadas seguirá siendo el mismo, es decir,

$$d_{122} = d'_{122}. \tag{6.15}$$

Las correlaciones (6.14) y (6.15) pueden cumplirse simultáneamente sólo en un caso, cuando $d_{122} = d'_{122} = 0$. Por consiguiente, para un cristal que tiene el eje de simetría de segundo orden, paralelo al eje X_3, el piezomódulo d_{122} es igual a cero.

Haciendo la misma operación con cada uno de los 18 piezomódulos independientes, podemos encontrar la forma de la matriz de piezomódulos para todas las clases de simetría, a excepción de las clases de singonías trigonal y hexagonal, para las cuales, hallándose los piezomódulos en el nuevo sistema de coordenadas X_1', X_2', X_3' enlazado con la operación inicial de simetría, es necesario utilizar el método analítico, es decir, emplear la correlación (6.5) y luego las correlaciones de tipo (6.15).

Las formas de las matrices (d_{ij}) para diferentes clases cristalográficas se dan en la tabla 6. Las matrices de los coeficientes g_{ij} coinciden con las matrices de los coeficientes d_{ij} de esta tabla. Para ciertas clases de simetría hay diferencia entre la forma de las matrices de los coeficientes e_{ij} y h_{ij} y la de las matrices de los coeficientes d_{ij} indicados. Al pasar de los índices binarios a los ternarios, para los coeficientes e y h en las fórmulas análogas a (6.12), los factores 1/2 están ausentes. Las formas de las matrices e_{ij} y h_{ij} diferentes de las matrices (d_{ij}) se dan en la tabla 7.

Efecto piezoeléctrico inverso. El efecto piezoeléctrico inverso es la consecuencia termodinámica del piezoefecto directo.

El piezoefecto inverso se describe con las ecuaciones

$$r_j = d_{ij}E_i, \tag{6.16}$$

$$r_j = g_{ij}P_i, \tag{6.17}$$

$$t_j = -e_{ij}E_i, \tag{6.18}$$

$$t_j = -h_{ij}P_i, \tag{6.19}$$

donde d, g, h, e con índices son los coeficientes piezoeléctricos introducidos anteriormente (véase las ecuaciones (6.1)—(6.4) o (6.8) — (6.11)).

Además del efecto piezoeléctrico (efecto de primer orden) que se revela sólo en los grupos no centrosimétricos de cristales, todos los cristales tienen efecto de electrostricción (efecto de segundo orden) que consiste en surgir deformaciones proporcionales al cuadrado del campo eléctrico aplicado:

$$r_{ij} = Q_{ijmn}E_mE_n,$$

donde Q_{ijmn} son coeficientes de electrostricción que constituyen el tensor de cuarto rango.

Posibilidades de principio de utilización de los cristales piezoeléctricos y diferentes coeficientes piezoeléctricos. Toda una serie de aparatos: micrófono, dinamómetro, vibrómetro, sismógrafo, fonocaptor, emisor de ultrasonido, etc., utilizan el cristal piezoeléctrico como un transductor mecanoeléctrico de energía. El régimen de funcionamiento y, por consiguiente, los coeficientes piezoeléctricos que caracterizan la sensibilidad del aparato correspondiente resultan ser diferentes.

Así, por ejemplo, la posibilidad de principio de utilizar una lámina cristalina en calidad de dinamómetro (condiciones estáticas) se desprende de la existencia del efecto piezoeléctrico directo que se describe con la ecuación

$$E_i = -g_{ij}t_j.$$

Puesto que la frecuencia de oscilaciones de láminas cristalinas utilizadas en micrófonos es mucho menor que sus frecuencias resonantes (las condiciones próximas a las estáticas), el trabajo de dichas láminas se puede caracterizar con la misma ecuación.

La sensibilidad de transductores mecanoeléctricos del tipo de micrófono o dinamómetro se determina con la relación de la tensión eléctrica obtenida en el cristal a la tensión

mecánica efectiva, es decir, se caracteriza con la magnitud del coeficiente piezoeléctrico g.

El trabajo de las láminas cristalinas utilizadas como vibrómetros, sismógrafos, fonocaptores, etc., se puede caracterizar con la ecuación

$$E_i = -h_{ij} r_j.$$

La expresión de la sensibilidad de tales transductores mecanoeléctricos determinada como relación de la tensión eléctrica en el cristal al desplazamiento (deformación) mecánico comprende el coeficiente piezoeléctrico h, es decir, su sensibilidad se caracteriza por la magnitud de este coeficiente.

Para describir el trabajo de las láminas cristalinas utilizadas como transductores mecanoeléctricos del tipo de teléfono, oscilógrafo, emisor de ultrasonido podemos utilizar la ecuación

$$r_j = d_{ij} E_i.$$

La sensibilidad de transductores de este tipo determinada como relación del desplazamiento (deformación) obtenido a la tensión eléctrica suministrada se caracteriza con la magnitud del piezomódulo d.

Así pues, en diferentes condiciones de trabajo, los piezoeléctricos como transductores mecanoeléctricos se caracterizan con diferentes coeficientes piezoeléctricos d, g, h y e. Si uno de los coeficientes piezoeléctricos del cristal es mucho mayor que los demás, es conveniente utilizar este cristal en el régimen de trabajo correspondiente.

Además de la efectividad de transformación, son de gran importancia para el empleo de los cristales otras propiedades suyas: resistencia mecánica, rigidez eléctrica, resistencia a la humedad, estabilidad de propiedades dieléctricas, constancia de las propiedades a cualquier temperatura, etc.

Coeficiente de acoplamiento mecanoeléctrico. El coeficiente de acoplamiento mecanoeléctrico k determinado con la relación

$$k^2 = \frac{U_{mec}}{U_{el}}, \qquad (6.20)$$

donde U_{el} es la energía eléctrica suministrada al cristal, U_{mec} es la energía mecánica obtenida del cristal, constituye una de las características más importantes del cristal piezoeléctrico como transductor mecanoeléctrico.

Si tiene lugar una transformación de energía, enlazada con la i-ésima componente del campo eléctrico y la j-ésima componente de deformación, en este caso el coeficiente de acoplamiento mecanoeléctrico se expresa mediante la correlación siguiente:

$$k = \frac{d_{ij}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_i^t}{4\pi} s_{jj}^E}}, \qquad (6.21)$$

donde d_{ij} son los módulos piezoeléctricos con que se describe la excitación piezoeléctrica; ε_i^t son las permeabilidades dieléctricas del cristal mecánicamente libre; s_{jj}^E son los coeficientes efectivos de compresibilidad elástica medidos en las condiciones del campo eléctrico continuo*).

Los coeficientes de acoplamiento mecanoeléctrico caracterizan el efecto de transformación de potencia en piezoeléctricos. Mediante ellos podemos comparar directamente los materiales piezoeléctricos, cuyas permeabilidades dieléctricas y las constantes elásticas difieren sustancialmente por el orden de magnitud.

Dependencia de las propiedades piezoeléctricas de una lámina cristalina de su orientación respecto de los ejes cristalofísicos. Cada piezomódulo tiene un sentido físico determinado y un valor numérico sólo en el sistema de coordenadas que examinamos, enlazado con el cristal. Si este sistema es cristalofísico, los piezomódulos se llaman fundamentales.

En el sistema de coordenadas cristalofísico, según la simetría del cristal, algunos piezomódulos se reducen a cero (véase la tabla 6).

Por otro lado, a menudo es posible hallar un nuevo sistema de coordenadas X_1', X_2', X_3', respecto del cual algún piezomódulo que difiere del cero en el sistema cristalofísico de coordenadas, en este nuevo sistema se reduce a cero. Simultáneamente pueden aparecer nuevos piezomódulos que han tenido los valores cero en los ejes cristalofísicos.

De aquí se deduce que el carácter de las propiedades de una lámina cristalina depende de su orientación respecto

*) Para los cristales piezoeléctricos, especialmente para ferroeléctricos, las *permeabilidades dieléctricas de un cristal mecánicamente* libre y del cristal mecánicamente apretado son diferentes. Lo mismo se refiere también a las compresibilidades elásticas medidas en las condiciones de constancia del campo **E** o de la inducción **D**.

de los ejes cristalofísicos. Cortando unas láminas orientadas de un modo determinado respecto de los ejes cristalofísicos, podemos lograr que aparezcan nuevos efectos piezoeléctricos, ausentes en las secciones directas, y, viceversa, algunos efectos pueden desaparecer, eligiendo la sección correspondiente. Conviene indicar que las propiedades de las láminas piezoeléctricas dependen también del método de aplicar los electrodos, de la dirección de campos eléctricos y del tipo de tensiones mecánicas.

Superficie de índices del efecto piezoeléctrico longitudinal. El tensor de piezomódulos d_{ijk} no puede ser representado totalmente por la única superficie característica. Por eso se examinan sólo los casos particulares que tienen importancia para la utilización práctica del piezoefecto.

Las superficies de piezoefecto longitudinal nos ofrecen un interés particular. Los radios vectores de tales superficies son proporcionales a la densidad de carga que surge en la superficie perpendicular a la tensión t'_{11} de tracción o compresión a lo largo del radio vector (fig. 6.1). En tanto que

$$|\sigma| = |P'_1| \text{ y } P'_1 = d'_{111}t'_{11},$$

es evidente que los radios vectores de las superficies del piezoefecto longitudinal son proporcionales a d'_{11}. Teniendo en cuenta que

$$r'_{11} = d'_{111}E'_1,$$

esta superficie representa también la deformación por tracción que surge en la dirección del campo aplicado.

Texturas piezoeléctricas. En la piezotécnica moderna se emplean mucho piezoeléctricos artificiales llamados texturas (cerámicas) piezoeléctricas, la posibilidad de existencia en las cuales del efecto piezoeléctrico fue predicha por A. Shúbnikov.

La textura (cerámica) piezoeléctrica es un agregado semicristalino compuesto de monocristales, el vector de polarización de los cuales está orientado por el campo exterior y, al ser quitado el campo, mantiene su dirección (cerámicas polarizadas). La dirección de polarización es para cerámica piezoeléctrica el eje de orden infinito. Conviene esperar la presencia de las propiedades piezoeléctricas en cerámicas con la simetría ∞, ∞m, $\infty 2$ y $\infty\infty$, es decir, en medios no centrosimétricos.

La matriz de coeficientes piezoeléctricos de textura de simetría $\infty\infty$ consta sólo de componentes nulas.

Las texturas pertenecientes a los grupos de simetría ∞, ∞m, $\infty 2$ tienen coeficientes piezoeléctricos diferentes de cero: las matrices de coeficientes d, g, e y h para texturas no difieren.

Las formas de matrices (d_{ij}) para texturas piezoeléctricas se dan en la tabla 8.

El cálculo de parámetros de texturas piezoeléctricas se efectúa mediante las ecuaciones del efecto piezoeléctrico directo e inverso, donde d, g, e y h son coeficientes piezoeléctricos de la textura correspondiente en el *sistema cristalofísico* de coordenadas, cuyo eje X_3 coincide con el eje de simetría de orden infinito.

En comparación con monocristales, las texturas piezoeléctricas tienen una serie de ventajas. Así, por ejemplo, mediante unos procedimientos tecnológicos sencillos (rectificación, prensado, fundición) podemos dar a un piezoelemento cerámico cualquier forma necesaria: la de lámina plana, de envoltura esférica o cilíndrica, etc. Creando diferentes direcciones de polarización artificial: longitudinal, transversal, radial, etc., y luego diferentes direcciones de polarización en diferentes partes de un mismo piezoelemento, obtenemos la posibilidad de variar ilimitadamente las *formas constructivas de elementos cerámicos*.

Oscilaciones de resonadores piezoeléctricos. Si en las caras opuestas de una lámina cortada de un modo determinado de un cristal piezoeléctrico ponemos electrodos, aplicando a éstos una diferencia de potencial variable, en este caso, en la lámina surgirán oscilaciones mecánicas debidas al piezoefecto inverso. La amplitud de estas oscilaciones alcanzará su máximo sólo en el caso en que la frecuencia de la

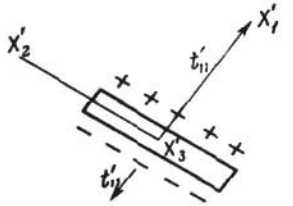


Fig. 6.1. Esquema que explica el efecto piezoeléctrico longitudinal.

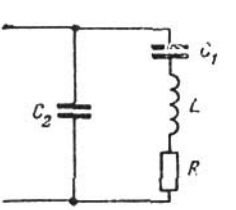


Fig. 6.2. Circuito equivalente de un resonador piezoeléctrico.

tensión alterna suministrada coincida con la frecuencia propia de las oscilaciones mecánicas de la lámina.

Una lámina cristalina oscilante con electrodos se llama resonador piezoeléctrico. El resonador piezoeléctrico es equivalente a un circuito oscilante constituido por la resistencia R, inductancia L y capacidad C_1 conectadas en serie en una derivación, y la capacidad C_2 en otra derivación paralela (fig. 6.2).

Tal sistema posee dos frecuencias resonantes: f_R, *frecuencia de resonancia en serie o resonancia de tensión* (siendo $R = 0$) y f_A, frecuencia de resonancia en paralelo o resonancia de corriente (siendo $R = \infty$); f_R se llama frecuencia de *resonancia* y f_A, *frecuencia de antirresonancia*, y se determinan por las dimensiones y propiedades elásticas y dieléctricas de la lámina.

Estas frecuencias están enlazadas con el coeficiente de acoplamiento mecanoeléctrico mediante la correlación

$$\frac{f_A - f_R}{f_R} = \frac{4}{\pi^2} \frac{k^2}{1-k^2}, \quad \text{de donde } k = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\Delta f}{f_R}}, \quad (6.22)$$

donde $\Delta f = f_A - f_R$.

Por consiguiente, la medición de las frecuencias f_A y f_R *nos permite determinar el coeficiente de acoplamiento* mecanoeléctrico que, según la correlación (6.21), a su vez, está enlazado con las constantes dieléctricas, piezoeléctricas y elásticas del cristal. Estas constantes también se puede hallar, midiendo las frecuencias f_R y f_A.

Las oscilaciones en resonadores cristalinos se clasifican según el tipo de deformaciones y las dimensiones de lámina que determinan la frecuencia resonante. Las oscilaciones más sencillas de vibradores piezoeléctricos son las oscilaciones de barretas por longitud (oscilaciones longitudinales), oscilaciones por grosor y oscilaciones de deslizamiento de las láminas.

Si un vibrador en forma de una barra oscila a causa del *efecto piezoeléctrico transversal* en la dirección de su longitud, sus frecuencias propias de resonancia se determinarán con la correlación

$$f_l = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{1}{\rho s'_{11}}}, \quad (6.23)$$

donde n es el número de armónico, l es la longitud de barra, s'_{11} *es el valor del coeficiente de compresibilidad elástica* en dirección de la longitud de barra, ρ es la densidad.

El vibrador que oscila en el sentido de su grosor es una lámina redonda o cuadrada cuyo espesor es pequeño en comparación con el diámetro o la longitud de la arista. En este caso, la lámina cristalina debe estar cortada de modo que al aplicar a los electrodos una tensión alterna sólo aparezcan en ella las oscilaciones en la dirección de la normal a la lámina. Este vibrador trabaja en el régimen del efecto piezoeléctrico longitudinal.

Las frecuencias propias de resonancia de la lámina que oscila por su grosor se determinan mediante la ecuación:

$$f_d = \frac{n}{2d}\sqrt{\frac{c'_{11}}{\rho}}, \qquad (6.24)$$

donde n es el número de armónico, d es el grosor de lámina, c'_{11} es la constante de rigidez en la dirección del grosor, ρ es la densidad.

Así pues, para determinar las constantes elásticas y piezoeléctricas del cristal es necesario excitar en él las oscilaciones del tipo más sencillo posible y medir las frecuencias resonantes y antirresonantes y la capacidad del cristal en bajas frecuencias*). Podemos recurrir a las mediciones de f_R y f_A de las láminas cristalinas en las cuales se excitan las oscilaciones longitudinales con el fin de determinar todas las constantes dieléctricas, piezoeléctricas y elásticas, a excepción de las de deslizamiento elásticas, para cuya determinación se suele utilizar las oscilaciones de deslizamiento a lo largo de la cara o las oscilaciones de deslizamiento por el grosor de la lámina cristalina.

Efecto piroeléctrico primario y secundario. Los cristales piroeléctricos son al mismo tiempo piezoeléctricos gracias a su simetría polar y ausencia del centro de inversión. Por lo tanto, observando experimentalmente la polarización piroeléctrica durante el calentamiento uniforme del cristal, se observará inevitablemente también el efecto piezoeléctrico originado por la deformación térmica del cristal. Si el cristal está mecánicamente apretado, es decir, no puede deformarse, el efecto piezoeléctrico será originado por las tensiones mecánicas que surgen al calentar el cristal apretado.

---

*) La permeabilidad dieléctrica medida en las frecuencias bajas resulta ser superior que la medida en las frecuencias altas. Esta diferencia es particularmente grande para los cristales ferroeléctricos.

Por consiguiente, el efecto piroeléctrico observado experimentalmente comprende, además del piroefecto «verdadero», es decir, una influencia directa del cambio de la temperatura en la polarización, otro piroefecto, «falso», o sea, el piezoefecto originado por la deformación térmica del cristal. Designando el coeficiente del piroefecto «verdadero» con γ' y el coeficiente del piroefecto «falso» con γ'', tendremos $\gamma = \gamma' + \gamma''$ (véase § 3).

El siguiente estudio termodinámico del fenómeno nos permite calcular la proporción del piroefecto primario y la del secundario en el efecto total. Consideremos variables independientes que caractericen el estado del cristal, las siguientes magnitudes: **E**, intensidad del campo eléctrico externo; r_{kl}, deformaciones que experimenta el cristal; T, temperatura del cristal.

Las magnitudes: **D**, inducción eléctrica; t_{ij}, tensiones mecánicas; S, entropía representarán las funciones de las magnitudes **E**, r_{kl} y T:

$$D_i = D_i(E_m, r_{kl}, T), \quad t_{ij} = t_{ij}(E_m, r_{kl}, T),$$
$$S = S(E_m, r_{kl}, T).$$

Examinemos la dependencia del vector de inducción **D** en función de temperatura con la condición de que el campo eléctrico externo esté ausente ($\mathbf{E} = 0$).

Puesto que $D_i = \varepsilon_0 E_i + P_i$, en este caso siendo $\bar{E} = 0$

$$\left(\frac{\partial D_i}{\partial T}\right)_{t,E} = \left(\frac{\partial P_i}{\partial T}\right)_{t,E} = \gamma_i.$$

Puesto que $D_i = D_i(T, r_{kl})$ y $r_{kl} = r_{kl}(t_{ij}, T)$, podemos escribir:

$$\left.\begin{aligned} dD_i &= \left(\frac{\partial D_i}{\partial T}\right)_{r_{kl}} dT + \left(\frac{\partial D_i}{\partial r_{kl}}\right)_T dr_{kl}, \\ dr_{kl} &= \left(\frac{\partial r_{kl}}{\partial t_{ij}}\right)_T dt_{ij} + \left(\frac{\partial r_{kl}}{\partial T}\right)_{t_{ij}} dT. \end{aligned}\right\} \qquad (6.25)$$

Si las mediciones se realizan a una presión externa constante, $dt_{ij} = 0$ y

$$dr_{kl} = \left(\frac{\partial r_{kl}}{\partial T}\right) dT. \qquad (6.26)$$

Colocando el valor de dr_{kl} de la correlación (6.26) en la expresión (6.25), obtenemos

$$dD_i = \left[\left(\frac{\partial D_i}{\partial T}\right)_{r_{kl}} + \frac{\partial D_i}{\partial r_{kl}} \frac{\partial r_{kl}}{\partial T}\right] dT. \qquad (6.27)$$

La expresión puesta entre paréntesis es el coeficiente del efecto piroeléctrico total. El sumando $\gamma_i' = \left(\frac{\partial D_i}{\partial T}\right)_{r_{kl}}$ determina la magnitud del piroefecto primario («verdadero»); la magnitud $\gamma_i'' = \frac{\partial D_i}{\partial r_{kl}} \frac{\partial r_{kl}}{\partial T}$ caracteriza el efecto piroeléctrico secundario («falso»), condicionado por el efecto piezoeléctrico durante la expansión térmica de cristal.

En tanto que $\frac{\partial r_{kl}}{\partial T} = \alpha_{kl}$, $\frac{\partial D_i}{\partial r_{kl}} = \frac{\partial D_i}{\partial t_{mn}} \frac{\partial t_{mn}}{\partial r_{kl}} = d_{imn} c^E_{mnkl}$,

donde α_{kl} son los coeficientes de la expansión térmica; d_{imn} *son los módulos piezoeléctricos*; c_{mnkl} son las rigideces elásticas del cristal, medidas a un campo eléctrico continuo, el coeficiente del efecto piroeléctrico secundario puede tomar la forma siguiente:

$$\gamma_i'' = d_{imn} c^E_{mnkl} \alpha_{kl}. \qquad (6.28)$$

El miembro derecho de la expresión (6.28) comprende las magnitudes medidas experimentalmente. Por eso el coeficiente γ_i'' se puede calcular y, por lo tanto, si es conocido el coeficiente γ_i, podemos valorar la parte del efecto piroeléctrico primario y la del secundario.

Ejemplos de solución de los problemas

6.1. Hallar la forma de la matriz de los módulos piezoeléctricos para la sal de Seignette.

Solución. Para resolver el problema utilicemos el método de comprobación directa. Primeramente examinemos el eje de simetría 2 que coincide con el eje X_3 del sistema cristalofísico de coordenadas. El eje $2 \parallel X_3$ transforma los ejes de coordenadas del modo siguiente: $X_1 \to -X_1$, $X_2 \to -X_2$, $X_3 \to X_3$ *o más brevemente:* $1 \to -1$, $2 \to -2$, $3 \to 3$.

Transformemos por turno todos los módulos según (6.5). Si el signo del módulo se cambia por el contrario, el módulo correspondiente será igual a cero; mas si el signo queda invariable, el módulo se conserva en la matriz de los módulos piezoeléctricos. Es evidente que se conservan sólo aquellos módulos d_{ij} que tienen en sus índices una o tres cifras 3.

Por eso

$$d_{111}=0,\ d_{112}=0,\ d_{113}\neq 0,\ d_{211}=0,$$
$$d_{212}=0,\ d_{213}\neq 0,\ d_{123}\neq 0,\ d_{133}=0,\ d_{222}=0,$$
$$d_{233}=0,\ d_{223}\neq 0,\ d_{331}=0,\ d_{323}=0,\ d_{311}\neq 0,$$
$$d_{312}\neq 0,\ d_{122}=0,\ d_{322}\neq 0,\ d_{333}\neq 0,$$

o en representación matricial:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & d_{25} & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & d_{36} \end{pmatrix}.$$

Luego tomemos el eje siguiente de segundo orden que coincide con X_2. Este eje de simetría transforma los ejes de coordenadas del modo siguiente:

$$X_1 \to -X_1,\quad X_2 \to X_2,\quad X_3 \to -X_3;$$
$$1 \to -1;\quad 2 \to 2,\quad 3 \to -3.$$

De los ocho módulos piezoeléctricos restantes se conservan sólo los que tienen en sus índices una o tres cifras 2, *es decir, los módulos piezoeléctricos*

$$d_{132} = d_{123}\,(d_{14}),\quad d_{231} = d_{213}\,(d_{25}),\quad d_{321} = d_{312}\,(d_{36}).$$

No hay razón para examinar la acción del tercer eje de segundo orden que coincide con X_1: según el teorema de Euler, este eje es elemento derivado de simetría y su acción se reduce a la acción de los ejes $2 \parallel X_3$ y $2 \parallel X_2$ examinados más arriba.

La forma definitiva de la matriz de los módulos piezoeléctricos de los cristales de la clase de simetría 222 es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{pmatrix}.$$

6.2. Caracterizar el efecto piezoeléctrico longitudinal en los cristales de la sal de Seignette, contestando a las preguntas siguientes:

a) ¿Con qué ecuación se describe el efecto piezoeléctrico longitudinal de una lámina de orientación arbitraria?

b) ¿Si existen tales direcciones en que este efecto esté *ausente*?

c) ¿Cómo hay que orientar las láminas que poseen el efecto piezoeléctrico longitudinal máximo respecto a los ejes cristalofísicos?

Solución. a) Examinemos una lámina con la normal $\mathbf{n}\ (n_1,\ n_2,\ n_3)$, orientada arbitrariamente respecto a los ejes cristalofísicos, traccionándola (o comprimiéndola) a lo largo de la dirección de su normal. Para hallar la magnitud del efecto piezoeléctrico longitudinal, es decir, la densidad de las cargas que surgen en la superficie de la lámina perpendicular a la dirección de la tracción, utilicemos la ecuación del efecto piezoeléctrico directo (6.1). El tensor de los módulos piezoeléctricos y el tensor de las tensiones se deben expresar en el mismo sistema de coordenadas. Se puede enlazar el sistema de coordenadas con la dirección de la tracción (compresión) y en este sistema el tensor de tensiones tendrá la forma más sencilla, pero todas las 18 componentes de la matriz de módulos piezoeléctricos pueden ser diferentes de cero. Por eso no hay razón de enlazar el sistema de coordenadas con esta dirección. Hallemos la solución en el sistema cristalofísico de coordenadas puesto que la matriz de los módulos piezoeléctricos se da y tiene la forma más sencilla precisamente en este sistema. La tracción (compresión) uniaxial en la dirección arbitraria $\mathbf{n}\ (n_1,\ n_2,\ n_3)$ se representa en el sistema cristalofísico de coordenadas por el tensor, cuyas componentes se hallan de la correlación $t_{jk} = tn_jn_k$; de aquí

$$\|t_{jk}\| = \begin{bmatrix} n_1^2 & n_1n_2 & n_3n_1 \\ n_1n_2 & n_2^2 & n_2n_3 \\ n_3n_1 & n_2n_3 & n_3^2 \end{bmatrix} t.$$

El efecto piezoeléctrico longitudinal se determina por la componente de polarización que es paralela a la dirección de la tracción (compresión), es decir,

$$P_{\parallel} = P_in_i$$

Tomando en consideración que $P_i = d_{ijk}t_{jk}$, obtenemos $P_{\parallel} = d_{ijk}tn_in_jn_k$.

Para la sal de Seignette, diferentes de cero son los módulos piezoeléctricos

$$d_{14} = 2d_{123}, \quad d_{25} = 2d_{231}, \quad d_{36} = 2d_{321}.$$

En conformidad con esto el efecto piezoeléctrico longitudinal de la lámina de sal de Seignette, cuya orientación

es determinada por la dirección de su normal n, respecto al sistema cristalofísico de coordenadas se describe con la ecuación

$$P_{||} = n_1 n_2 n_3 (2d_{123} + 2d_{231} + 2d_{321})\, t = n_1 n_2 n_3 (d_{14} + d_{25} + d_{36})\, t.$$

b) Partiendo de la expresión para $P_{||}$, podemos concluir que para todas las direcciones que están en los planos coordenados el efecto longitudinal no existe.

c) El efecto piezoeléctrico longitudinal máximo lo poseen las láminas cristalinas, la normal a las cuales forma ángulos iguales con los ejes cristalofísicos. Tales láminas (secciones L, véase la fig. 2.4.) se emplean mucho con los fines prácticos.

6.3. ¿Cómo hay que dirigir las aristas de la lámina de la sección Z de ADP (véase la fig. 2.3), para que ésta se polarice bajo la acción de las tensiones normales aplicadas en las direcciones paralelas a sus aristas?

Solución. De la forma de matriz de los módulos piezoeléctricos de la clase de simetría $\bar{4}2m$ se desprende que la lámina de la sección Z estará polarizada ($P_3 \neq 0$) sólo en el caso en que su estado de tensión se describe con el tensor

$$\begin{bmatrix} 0 & t_6 & 0 \\ t_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para contestar a la pregunta del problema es necesario reducir el tensor indicado de tensiones a los ejes principales X_1', X_2', X_3' y hallar la orientación de los ejes principales respecto a los iniciales. Las direcciones buscadas de las aristas de lámina de la sección Z serán las direcciones de los ejes principales del tensor de tensiones.

La reducción del tensor dado a los ejes principales se realiza haciendo girar los ejes iniciales del tensor alrededor del eje X_3 en 45° en el sentido del movimiento de las agujas de reloj. El tensor de tensiones toma en este caso la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} -t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, para que la lámina cristalina de la sección Z de ADP se polarice bajo la acción de tensiones normales, hay que cortarla como lo indica la fig. 6.3.

Tales láminas se llaman las secciones Z de 45°.

6.4. Para determinar los módulos piezoeléctricos de una cerámica polarizada de titanato de bario de ella está hecha una probeta en forma de cubo a la que se aplica una tensión de compresión t en la dirección del eje de la polarización de la cerámica. Luego esta probeta ha sido sometida a la acción de una compresión hidrostática p.

¿En qué caras del cubo surgen las cargas eléctricas durante estos ensayos? ¿Qué módulos piezoeléctricos de cerámica de titanato de bario pueden ser determinados por los resultados de estos ensayos?

Solución. Puesto que el eje X_3 del sistema cristalofísico de coordenadas de cerámica coincide con la dirección de polarización, su estado de tensión se describirá por el tensor

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t_{33} \end{bmatrix}.$$

La compresión hidrostática se da con el tensor de la forma

$$\begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix},$$

por consiguiente, $t_1 = t_2 = t_3 = -p$. Tanto la compresión uniaxial en la dirección indicada, como la compresión hidrostática originan una polarización de la cerámica en la dirección de su eje polar; en el primer caso $P_3 = d_{33}\,(-t_3)$, en el segundo, $P_3 = (2d_{31} + d_{33})\,(-p)$. De este modo, según los resultados de los experimentos pueden ser determinados dos de los tres módulos piezoeléctricos independientes de la cerámica de titanato de bario: d_{31} y d_{33}.

6.5. Un receptor piezoeléctrico de sonido se compone de una membrana, en la cara interior de la cual se monta una columna pequeña de láminas cristalinas de poco espesor. Entre las láminas se interponen electrodos de hoja metálica fina (fig. 6.4). ¿Qué láminas de la sal de Seignette tienen la mayor sensibilidad en calidad de receptores: de la sección X de 45° o de la sección Y de 45°?

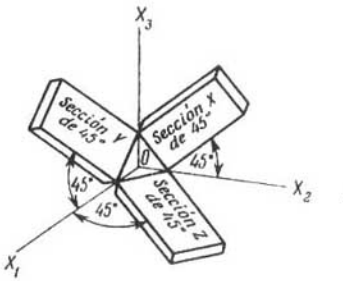


Fig. 6.3. Secciones X de 45°, Y de 45° y Z de 45°.

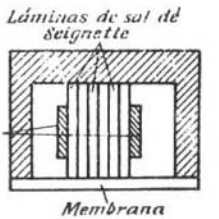


Fig. 6.4.

Solución. La sensibilidad del receptor puede ser determinada como la relación entre la tensión eléctrica surgida bajo la acción de la tensión mecánica dada (presión de la onda acústica) y la magnitud de esta tensión mecánica, es decir, como V/t.

Las oscilaciones mecánicas de la frecuencia vocal que actúan en las láminas de la sal de Seignette tienen frecuencias considerablemente menores que las frecuencias resonantes, por eso, en el caso dado podemos utilizar la ecuación (6.10)

$$E_i = -g_{ij}t_j,$$

que para una lámina de la sección X de 45° tomará la forma

$$E_1 = -g_l t_l,$$

donde t_l es la tensión mecánica que actúa en la dirección de la longitud de lámina que pasa bajo el ángulo de 45° con respecto a los ejes cristalofísicos X_2 y X_3 (véase la fig. 6. 3); g_l es el coeficiente piezoeléctrico efectivo, responsable de la excitación de la lámina de la sección X de 45°. Este puede ser calculado de la correlación $g_l = l_i l_j l_k g_{ijk}$, donde g_{ijk} son los coeficientes piezoeléctricos de la sal de Seignette y l_i son cosenos directores de la longitud de lámina respecto a los ejes cristalofísicos.

La magnitud de la intensidad del campo eléctrico excitado por una tensión mecánica t es igual a

$$E_1 = \frac{V}{d} = -g_l t_l = 31{,}5 \cdot 10^{-8} \cdot t_l \text{ unid. CGSE},$$

donde t_i es la presión en din/cm^2; d es el grosor de la lámina en cm; V es la tensión eléctrica que surge entre las caras activas de la lámina de sal de Seignette de la sección X de 45° en unid. CGSE. De aquí

$$V = -dg_i t_i = dg_i t_i.$$

En este caso la sensibilidad del receptor, que se determina con la relación V/t, es igual a dg_i. Por consiguiente, la sensibilidad es proporcional al coeficiente piezoeléctrico g_i. Si la membrana consta de n láminas-receptores conectadas en serie, su sensibilidad es n veces mayor.

Los coeficientes piezoeléctricos g_i para la sección X de 45° y la sección Y de 45°, respectivamente, son

$$g_i = \frac{1}{2} g_{14} = 3{,}15 \cdot 10^{-7} \text{ unid. CGSE},$$

$$g_i = \frac{1}{2} g_{25} = -9{,}5 \cdot 10^{-7} \text{ unid. CGSE},$$

de donde se deduce que g_i para la sección X de 45° es tres veces menor que para la sección Y de 45°. Por eso, la lámina de la sección Y de 45° con la misma presión excitará en el circuito abierto una tensión eléctrica aproximadamente tres veces mayor que la lámina de la sección X de 45°, y, por consiguiente, la sensibilidad de las láminas de la sección Y de 45° será tres veces mayor que la sensibilidad de las láminas de la sección X de 45° de la sal de Seignette. Las láminas de la sección Y de 45° se utilizan en los receptores acústicos, como captadores de las presiones hidrostáticas y para transformar la energía eléctrica en la mecánica.

6.6. ¿Cuál de los vibradores que oscilan en el sentido de su longitud y se emplean como emisores de ultrasonido: el de la sección X de 45° o de la sección Y de 45° de la sal de Seignette (véase la fig. 6.3), tiene el coeficiente de acoplamiento mecanoeléctrico mayor? ¿Oscilaciones de qué frecuencia podemos obtener por medio de tales emisores de 20 mm de longitud? ¿En qué ondas debe trabajar el generador para excitar las oscilaciones de las láminas de las secciones indicadas?

Solución. El sistema de coordenadas enlazado con las aristas del vibrador, que es una sección X de 45°, respecto al sistema cristalofísico de coordenadas del cristal de la sal de Seignette se representa por la siguiente tabla de cosenos:

Ejes	X_1	X_2	X_3
X_1'	1	0	0
X_2'	0	cos 45°	sen 45°
X_3'	0	—sen 45°	cos 45°

La ecuación de la excitación piezoeléctrica de la sección X de 45° es $r_2' = d_{12}' E_1$ y el coeficiente de acoplamiento mecanoeléctrico para la misma sección será

$$k = d_{12}' \sqrt{4\pi / e_1^T s_{22}'},$$

donde d_{12}' es el módulo piezoeléctrico, s_{22}' es el coeficiente de la compresibilidad elástica en la dirección de la longitud del vibrador. Según (6.5)

$$d_{12}' = d_{122}' = C_{1i}C_{2j}C_{2k}d_{ijk} = 2\,(C_{11}C_{22}C_{23}d_{123} + C_{12}C_{23}C_{21}d_{231} + C_{13}C_{21}C_{22}d_{312}) =$$

$$= 2 \cos 45° \operatorname{sen} 45° d_{123} = \frac{1}{2} d_{14} = 5{,}75 \cdot 10^{-6} \text{ unid. CGSE.}$$

En conformidad con (7.2a)

$$s_{22}' = s_{2222}' = C_{2i}C_{2j}C_{2k}C_{2l}s_{ijkl} = C_{22}^4 s_{22} + C_{23}^4 s_{33} + 2C_{22}^2 C_{33}^2 s_{23} + C_{22}^2 C_{23}^2 s_{44} = (\cos 45°)^4 s_{22} + (\operatorname{sen} 45°)^4 s_{33} + 2\,(\cos 45° \operatorname{sen} 45°)\, s_{23} + (\operatorname{sen} 45° \cos 45°)^2 s_{44} = \frac{1}{4}(s_{22} + s_{33} + 2s_{23} + s_{44}) =$$

$$= 3{,}17 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^2/\text{din.}$$

De aquí

$$k_{45°X} = 5{,}75 \cdot 10^{-6} \sqrt{\frac{12{,}56 \cdot 3{,}16}{480} \cdot 10^{11}} = 0{,}524 \approx 52\%.$$

La frecuencia resonante de la sección X de 45° se encontrará mediante la correlación

$$f_R = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{1}{\rho s_{22}'}} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{3{,}16 \cdot 10^{11}}{1{,}77}} = 105 \text{ kHz.}$$

Sabiendo la frecuencia resonante de la lámina cristalina es fácil determinar la longitud de la onda en que debe trabajar el generador para excitar las oscilaciones de la lámina de

la sección X de 45°. En el caso de la resonancia, la frecuencia de oscilaciones f_R es igual a la frecuencia de oscilaciones de la corriente eléctrica, es decir, $f_R = f_{el} = c/\lambda_{el}$, donde $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, λ_{el} es la longitud de la onda de las oscilaciones eléctricas. De aquí, la constante de longitud de la onda $\lambda_{el}/l = 145$, siendo $l = 20$ mm, $\lambda_{el} = 2{,}9 \cdot 10^3$ mm.

Análogamente, para el vibrador que representa una sección Y de 45° de la sal de Seignette obtenemos una tabla de cosenos:

Ejes	X_1	X_2	X_3
X'_1	cos 45°	0	—sen 45°
X'_2	0	1	0
X'_3	sen 45°	0	cos 45°

Como se desprende de los cálculos,

$$r'_3 = d'_{23} E_2, \quad k_{45°Y} = d'_{23} \sqrt{\frac{4\pi}{\varepsilon_2^T s'_{33}}},$$

$$d'_{23} = \frac{d_{25}}{2} = -80 \cdot 10^{-3} \text{ unid. CGSE},$$

$$s'_{33} = \frac{1}{4}(s_{11} + s_{33} + s_{55} + 2s_{13}) = 9{,}275 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^2/\text{din},$$

$$k_{45°Y} = 27\%, \quad f_R = \frac{1180}{l} \text{ kHz}, \quad \frac{\lambda_{el}}{l} = 254$$

(siendo $l = 20$ *mm,* $f_R = 59$ *kHz,* $\lambda_{el} = 5{,}08 \cdot 10^3$ mm).

Los vibradores de la sal de Seignette que son las secciones X de 45° e Y de 45° tienen valores bastante grandes de los coeficientes de acoplamiento mecanoeléctrico. Pero para *preparar los emisores de ultrasonido*, los cristales de la sal de Seignette son poco útiles a causa de su baja resistencia mecánica. No obstante, en receptores de ultrasonido, se emplean con éxito, gracias a sus altos coeficientes piezoeléctricos.

Los vibradores que oscilan por longitud se utilizan, por lo común, para excitar las oscilaciones ultraacústicas en la gama de 20 a 200 kHz. Como inconvenientes de vibradores que oscilan por longitud, debemos indicar la superficie *emisora relativamente pequeña (topes de vibrador)* que no

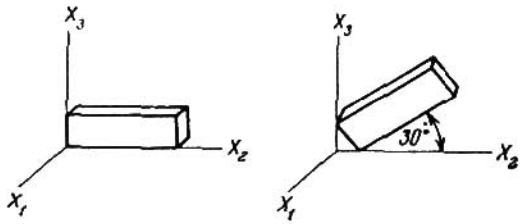


Fig. 6.5.

se puede aumentar de un modo arbitrario. En las frecuencias altas es conveniente utilizar los vibradores que oscilan por su grosor.

§ 6.7. Los módulos piezoeléctricos de los cristales de cuarzo han sido determinados con un método dinámico en las frecuencias fundamentales en dos barretas de dos orientaciones diferentes (fig. 6.5).

Los resultados de las mediciones para estas barretas se dan en la tabla:

Orientación de la sección	Longitud de barreta, en mm	f_R, en kHz	f_A, en kHz	Permeabilidad dieléctrica del cristal libre ε^t
sección X	29,99	89,215	89,535	4,49
sección X de 30°	32,26	79,96	80,067	4,49

Calcular las magnitudes de los módulos piezoeléctricos según los resultados del experimento.

Solución. La ecuación de la excitación piezoeléctrica de una barra de cuarzo de la sección X es: $r_2 = d_{12}E_1$. El coeficiente piezoeléctrico d_{12}, responsable de la excitación de la sección X, se puede calcular mediante la correlación (6.21)

$$d_{12} = k\sqrt{\frac{\varepsilon_1 s^E_{22}}{4\pi}},$$

si sabemos el coeficiente de acoplamiento mecanoeléctrico de la barreta y el valor de la compresibilidad elástica en

dirección de la longitud de la barreta que coincide con el eje X_2. El coeficiente de acoplamiento mecanoeléctrico, según (6.22), es igual a $\frac{1}{2}\pi\sqrt{\Delta f/f_R}$, donde $\Delta f = f_A - f_R = 0{,}32$ kHz; de aquí, $k = 0{,}0935$.

Según (6.23), la frecuencia resonante fundamental de una barreta de la sección X que oscila en el sentido longitudinal, y alargada en la dirección del eje X_2, $f_R = 1/2l\sqrt{\rho s_{22}}$. De aquí podemos encontrar el coeficiente s_{22}:

$$s_{22} = \frac{1}{4l^2\rho f_R^2}.$$

Colocando en la última expresión la longitud de la barreta l (en cm), el valor de la frecuencia resonante f_R (en Hz) y la densidad de cuarzo (en g/cm³), obtenemos

$$s_{22} = 131{,}6 \cdot 10^{-14} \text{ cm}^2/\text{din}.$$

Para los cristales de cuarzo $s_{11} = s_{22}$ y $|d_{12}| = |d_{11}|$. Colocando los valores de k, s_{22} y la permeabilidad dieléctrica ε_1 del cristal libre en la expresión para d_{12}, hallamos

$$|d_{12}| = |d_{11}| = 6{,}45 \cdot 10^{-8} \text{ unid. CGSE}.$$

La dirección de la longitud de la barreta, que se ha utilizado para determinar el *módulo piezoeléctrico independiente* d_{14} del cuarzo, se ha elegido bajo el ángulo de 30° respecto al eje X_2 (véase la fig. 6.5). La orientación de los ejes X_1', X_2', X_3' *enlazados con las aristas de esta barreta respecto* a los ejes cristalofísicos del cuarzo se designa con la tabla siguiente:

Ejes	X_1	X_2	X_3
X_1'	1	0	0
X_2'	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
X_3'	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

La ecuación de la excitación piezoeléctrica de tal barra es:

$$r_2' = d_{12}' E_1,$$

donde d'_{12} es el módulo piezoeléctrico efectivo responsable de la excitación de las oscilaciones de barreta. Expresemos d'_{12} mediante los módulos piezoeléctricos fundamentales del cuarzo:

$$d'_{12} = d'_{122} = C_{1i}C_{2j}C_{2k}d_{ijk} = C_{11}C_{21}^2 d_{111} + \\ + C_{11}C_{22}^2 d_{122} + 2C_{11}C_{22}C_{23}d_{123} + 2C_{12}C_{23} \times \\ \times C_{21}d_{213} + 2C_{12}C_{21}C_{22}d_{212} = \frac{3}{4}d_{12} + \frac{\sqrt{3}}{4}d_{14} = \\ = -\frac{3}{4}d_{11} + \frac{\sqrt{3}}{4}d_{14} = -0{,}75d_{11} + 0{,}434d_{14},$$

$$d'_{12} = k' \sqrt{\frac{e_1 s'_{22}}{4\pi}},$$

donde k' es el coeficiente de acoplamiento mecanoeléctrico de la segunda barreta igual a $\frac{1}{2}\pi\sqrt{\Delta f/f_R}$, s'_{22} es el valor de la compresibilidad elástica de la barreta dada, igual a $1/4l^2\rho f_R^2$.

Colocando en las últimas correlaciones los valores de f_R, Δf_R, la longitud de la barreta l y también ρ, hallamos

$$k' = 0{,}0577, \quad s'_{22} = 139{,}6 \cdot 10^{-14} \text{ cm}^2/\text{din}.$$

De aquí

$$d'_{12} = 0{,}577\sqrt{\frac{4{,}49 \cdot 139{,}6 \cdot 10^{-14}}{12{,}56}} = 4{,}06 \cdot 10^{-8} \text{ unid. CGSE}.$$

Colocando los valores obtenidos d_{11} y d'_{12} en la expresión $d'_{12} = -0{,}75d_{11} + 0{,}434d_{14}$ y sabiendo que $d_{11} = -d_{12}$, obtenemos

$$d_{14} = 1{,}7 \cdot 10^{-8} \text{unid. CGSE}.$$

6.8. Calcular las partes de los efectos piroeléctricos primario y secundario para los cristales del nitrito de bario.

Solución. Los coeficientes piroeléctricos medidos experimentalmente representan una suma de los coeficientes de los piroefectos primario y secundario: $\gamma'_i + \gamma''_i$. Si son conocidas las propiedades elásticas, piezoeléctricas y térmicas de un piroeléctrico, podemos calcular, utilizando la correlación (6.28), la parte del efecto secundario en el piroefecto total. Para cristales del nitrito de bario, que tienen un coeficiente piroeléctrico $\gamma_3 = \gamma'_3 + \gamma''_3$, la expresión (6.28)

toma la forma

$$\gamma_3^{\sigma} = d_{3j} c_{jk} \alpha_k,$$

donde α_k son los coeficientes de dilatación térmica, d_{3j} son los módulos piezoeléctricos que se encuentran en la tercera fila de la matriz (d_{ij}), c_{jk} son las rigideces elásticas del cristal.

Para el nitrito de bario son diferentes de cero los coeficientes siguientes de d_{3j} (véase la tabla 9): d_{31}, $d_{32} = -d_{31}$, d_{33}.

Tomándolo en consideración y también la forma de matrices (α_k) y (c_{jk}) (véase las tablas 4, 5 y 9) para el nitrito de bario, obtenemos la siguiente expresión para γ_3^{σ}:

$$\gamma_3^{\sigma} = d_{3j} c_{jk} \alpha_k = d_{31} (c_{11}\alpha_1 + c_{12}\alpha_2 + c_{13}\alpha_3) + \\ + d_{32} (c_{21}\alpha_1 + c_{22}\alpha_2 + c_{23}\alpha_3) + d_{33} (c_{31}\alpha_1 + c_{32}\alpha_2 + c_{33}\alpha_3).$$

O, teniendo en cuenta que $c_{11} = c_{22}$, $c_{13} = c_{23}$, $\alpha_1 = \alpha_2$, obtenemos

$$\gamma_3^{\sigma} = 2d_{31} [(c_{11} + c_{12}) \alpha_1 + c_{13}\alpha_3] + 2d_{33} c_{31} \alpha_1 + d_{33} c_{33} \alpha_3.$$

Colocando los valores de los coeficientes d_{3j}, c_{jk} y α_k de la tabla 12, obtenemos $\gamma_3^{\sigma} = 0{,}72$ unid. CGSE. Puesto que el coeficiente del efecto piroeléctrico total es igual a 8 unid. CGSE, la parte del efecto piroeléctrico secundario en el total, a la temperatura ambiente, será aproximadamente de un 9%. La parte fundamental (cerca del 90%) del efecto piroeléctrico en los cristales del nitrito de bario es condicionada por el efecto piroeléctrico primario («verdadero»).

Problemas

6.9. Valiéndose del método de Fumi, hallar la forma de la matriz de los módulos piezoeléctricos de los cristales de la clase $\bar{4}2\,m$. ¿Qué forma toma la matriz (d_{ij}) en el sistema de coordenadas X_1', X_2', X_3' girado en 45° alrededor del eje $\bar{4}$ en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj?

6.10. Determinar el número de los módulos piezoeléctricos independientes para la cerámica de titanato de bario (clase de simetría $\infty\,m$).

Indicación. Para resolver este problema no hace falta examinar todos los dieciocho módulos piezoeléctricos, sino sola-

mente aquellos que forman la matriz (d_{ij}) para la clase de simetría, por ejemplo, 6*mm* (véase la tabla 6), en tanto que *los módulos piezoeléctricos, que se reducen a cero en* la clase 6*mm*, serán ceros también en la clase de simetría ∞m.

6.11. Encontrar la forma de la matriz de los módulos piezoeléctricos para la textura de la sal de Seignette (clase de simetría $\infty 2$). *Indicación.* Para la solución del problema hay que utilizar la matriz de los módulos piezoeléctricos de la clase 222 (véase la tabla 6).

Demostrar que la matriz de los módulos piezoeléctricos de la textura con la simetría $\infty\infty$ se compone sólo de las componentes cero. *Indicación.* Para la solución del problema, hay que tener en cuenta que el grupo $\infty\infty$ contiene, en calidad de subgrupo, un grupo de simetría 423.

6.12. Demostrar que los cristales pertenecientes a la clase 4 poseen el eje de simetría del orden infinito con respecto a las propiedades piezoeléctricas. Nombrar las clases de simetría cuyos cristales tienen las mismas propiedades.

6.13. Demostrar que para las clases de simetría 422 y 622 no existe el efecto piezoeléctrico longitudinal en ninguna dirección.

6.14. A las caras activas de las láminas de las secciones X, Y y Z (véase la fig. 2.3) de la sal de Seignette está aplicado un campo eléctrico de la intensidad E. ¿Qué deformaciones experimentan tales láminas?

6.15. Los cristales de turmalina, sulfato de litio y también de tartrato de potasio pertenecen a las clases polares de simetría y pueden ser utilizados como captadores de la presión estática o hidrostática de baja frecuencia. ¿Cuál de los cristales enumerados es más sensible a la presión hidrostática?

6.16. Hallar la expresión para el efecto piezoeléctrico longitudinal en los cristales del cuarzo y del clorato de sodio. ¿A lo largo de qué direcciones es imposible el efecto piezoeléctrico longitudinal en estos cristales?

6.17. Un paralelepípedo de cuarzo con las aristas a, b, c paralelas, respectivamente, a los ejes cristalofísicos X_1, X_2, X_3, está sometido a la acción de un esfuerzo de tracción F a lo largo de sus aristas. Hallar la expresión de las magnitudes de las cargas que surgen en las caras de paralelepípedo.

6.18. Calcular el efecto piezoeléctrico transversal y el longitudinal de una lámina de turmalina de la sección Z, durante la acción de la tensión de 10^3 kgf/cm^2 a lo largo de la dirección [0001].

6.19. Determinar las deformaciones relativas de las aristas de una lámina de sal de Seignette de la sección X de 45° (véase la fig. 6.3), si a sus caras activas está aplicado el campo eléctrico continuo de la intensidad de 10^3 V/cm. ¿Si se puede utilizar dicha sección para obtener las oscilaciones longitudinales por el grosor?

6.20. ¿Cómo hay que cortar una lámina de esfalerita para obtener la densidad máxima de la carga en sus caras activas, si está aplicado el esfuerzo uniaxial de tracción t perpendicular a la superficie de la lámina?

6.21. Un campo eléctrico de $E = 2000$ V/cm está aplicado al cubo de dihidrofosfato de amonio, orientado con sus aristas a lo largo de los ejes cristalofísicos, en la dirección de su diagonal plana. Determinar la magnitud y el carácter de las deformaciones que experimenta el cubo.

6.22. ¿Qué desplazamientos absolutos experimenta el borde de una lámina de cuarzo de la sección X (véase la fig. 2.3) de las dimensiones: $x_1 = 0{,}1$ cm, $x_2 = 5$ cm, $x_3 = 5$ cm, si a los electrodos puestos en sus caras activas está aplicada la tensión de 3 kV?

6.23. Determinar el carácter de las deformaciones que experimentan las láminas de cuarzo de las secciones X, Y y Z (véase la fig. 2.3) durante el efecto piezoeléctrico inverso, si los electrodos están aplicados a sus caras activas. ¿Qué tipos de oscilaciones pueden ser excitados en estas láminas, utilizando un campo eléctrico alternativo?

6.24. Determinar deformaciones relativas de las aristas de una sección Z de 45° de la sal de Seignette (véase la fig. 6.3) originadas por la aplicación de un campo eléctrico de la intensidad de 10^3 V/cm (los electrodos están puestos en las caras activas).

6.25. Escribir la ecuación y hallar el módulo piezoeléctrico que caracteriza la excitación piezoeléctrica de una barreta de cuarzo de la sección X «giratoria», es decir, la barreta cuya longitud se sitúa bajo un ángulo arbitrario φ con respecto al eje X_2 (fig. 6.6). Examinar los casos en que $\varphi = 0°$ y $\varphi = 90°$.

6.26. Hallar la expresión de la superficie del efecto piezoeléctrico longitudinal del cuarzo. Utilizando las coor-

denadas polares, formar la sección de esta superficie por el plano coordenado X_1X_2 y determinar la simetría de la sección obtenida.

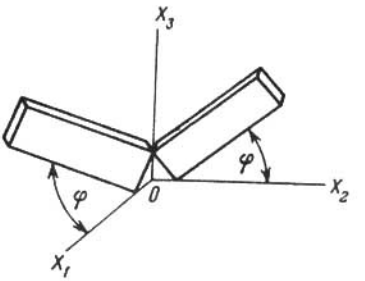


Fig. 6.6. Secciones X e Y giradas

6.27. La tensión uniaxial constante t está aplicada al cristal de cuarzo en la dirección perpendicular al eje de tercer orden. Demostrar que si la dirección t gira alrededor del eje de tercer orden, el vector de polarización piezoeléctrica, permaneciendo constante en su magnitud, también girará alrededor del eje de tercer orden, pero dos veces más rápidamente y en la dirección contraria.

6.28. ¿Cómo debe estar orientada una lámina de esfalerita para que experimente la deformación máxima posible en la dirección del campo eléctrico aplicado?

6.29. ¿En qué dirección respecto del eje ∞ hay que traccionar una lámina de textura piezoeléctrica y de simetría $\infty 2$ para obtener la densidad máxima de las cargas en sus topes?

6.30. La densidad de las cargas que surgen en los topes opuestos de la lámina de turmalina de la sección Z, utilizada como captador de presiones hidrostáticas, es igual a $2{,}5 \times \times 10^{-8}$ C/cm^2. Determinar la magnitud de la presión hidrostática medida con tal lámina.

6.31. Un paralelepípedo rectangular con las aristas a, b y c de la textura de la sal de Seignette (clase de simetría ∞ 2) está preparado de modo que el eje ∞ de textura se da por una dirección arbitraria $\mathbf{n}$ (n_1, n_2, n_3) respecto a sus aristas. El paralelepípedo está traccionado a lo largo de una arista por el esfuerzo t. Hallar la expresión para las magnitudes de las cargas que surgen en las caras del paralelepípedo.

6.32. Una lámina de cristal de resorcina de la sección Z, de las dimensiones $10 \times 10 \times 1$ mm^3 está deformada de modo que una de sus caras, perpendicular a una arista corta, ha experimentado un desplazamiento de 10^{-3} mm. ¿Qué diferencia de potencial existe entre las caras activas de la lámina? Calcular la magnitud de la carga en sus caras activas.

6.33. Calcular la relación de los parámetros de la célula elemental del cristal de $BaTiO_3$ en la fase ferroeléctrica tetragonal, si en la fase paraeléctrica el parámetro de la célula es

$$a = 4 \text{ Å},$$

$$P^s = 26 \cdot 10^{-6} \text{ C/cm}^2.$$

6.34. Determinar la magnitud del ángulo monoclínico de la sal de Seignette en la fase ferroeléctrica que surge debido a la deformación espontánea durante la transición de fase ($P^s = 0{,}2 \cdot 10^{-6}$ C/cm^2).

6.35. Determinar la magnitud del coeficiente de acoplamiento mecanoeléctrico de la lámina de la sección Z del cristal de CdS que realiza las oscilaciones longitudinales.

6.36. Calcular la magnitud del desplazamiento absoluto del borde de la lámina de la sección Z del cristal de CdS, siendo aplicada la tensión de $3 \cdot 10^3$ V/cm a sus caras activas. El grosor de la lámina es de 10^{-2} mm.

6.37. ¿Con qué módulos piezoeléctricos se determina la excitación piezoeléctrica de la sección Y de 45° de cristal de CdS?

6.38. ¿Cómo debe estar orientada la lámina del cristal de CdS respecto de sus ejes cristalofísicos para que la aplicación del campo eléctrico alternativo a sus caras activas origine las deformaciones de deslizamiento por su grosor?

6.39. Calcular las magnitudes de los coeficientes de acoplamiento mecanoeléctrico de la sección X de 45° de la barreta de la sal de Seignette, y también de su sección L (véase las figs. 2.3 y 2.4).

6.40. Determinar la magnitud del coeficiente de acoplamiento mecanoeléctrico de la sección Z de 45° de ADP, y también de la sección L de ADP (véase las figs. 2.3 y 2.4).

6.41. Una lámina de esfalerita está cortada de modo que sus caras activas son perpendiculares a la dirección [110]. ¿Qué módulo piezoeléctrico determina las deformaciones de deslizamiento por el grosor de esta lámina, si el campo eléctrico está aplicado a sus caras activas?

6.42. Una probeta cristalina de clorato de sodio tiene forma de cubo, coincidiendo las direcciones de sus aristas con las direcciones [100]. Hallar la expresión de la densidad de las cargas que surgen en las caras de la probeta durante su tracción con el esfuerzo t en las direcciones: a) [100], b) [110], c) [111].

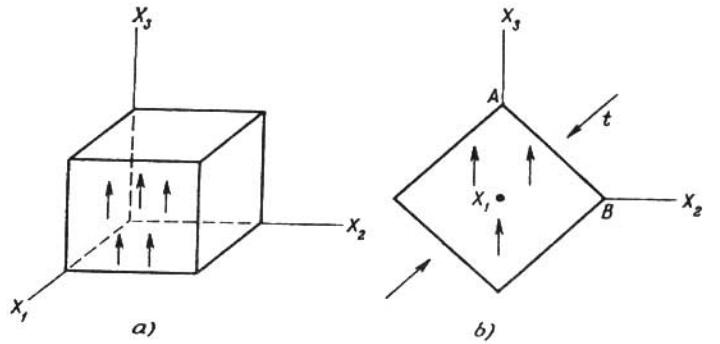


Fig. 6.7.

6.43. ¿Qué sección del cristal de EDT (etilendiaminotartrato) hay que tomar para que, al aplicar un campo eléctrico a sus caras activas, experimente tanto deformaciones de tracción o de compresión como deformación por cizallamiento?

6.44. ¿Qué grosor debe tener un vibrador que consiste en una lámina de cuarzo de la sección X (véase la fig. 2.3) y oscila por su grosor, sintonizado con la emisión de las frecuencias de 30 MHz? ¿Si podemos obtener con esta lámina las oscilaciones de la frecuencia de 3000 MHz? ¿Qué grosor debe tener la lámina de turmalina de la sección Z (véase la fig. 2.3), sintonizada con la emisión de las oscilaciones del mismo tipo y de la misma frecuencia?

6.45. Calcular los coeficientes de acoplamiento mecanoeléctrico de las láminas indicadas en el problema anterior.

6.46. Para medir los módulos piezoeléctricos de una cerámica polarizada de titanato de bario, la probeta en forma de cubo de las dimensiones de $1 \times 1 \times 1$ cm^3 (fig. 6.7, *a*) ha sido comprimida con un esfuerzo de 80 kgf en la dirección del eje X_3 que es la dirección de la polarización, luego en la dirección del eje X_1, con el mismo esfuerzo. La magnitud de carga, surgida como resultado de esta acción en la cara perpendicular al eje X_3, en el primer caso ha sido de $14{,}8 \cdot 10^{-8}$ C, en el segundo, la magnitud de carga de signo contrario, $6{,}15 \cdot 10^{-8}$ C. El tercer módulo piezoeléctrico independiente se ha determinado en una probeta

de las mismas dimensiones, orientada según indica la fig. 6.7, *b*; actuando en la cara *AB* con el esfuerzo de 80 kgf, la magnitud de la carga en esta cara ha sido de $10{,}3 \cdot 10^{-8}$ C.

Determinar los valores de los módulos piezoeléctricos de la cerámica polarizada del titanato de bario.

6.47. Al medir la frecuencia resonante y la antirresonante de la lámina de esfalerita que consiste en una sección *Z* de 45° (véase la fig. 6.3), se han obtenido los valores siguientes:

$$f_R = 117 \text{ kHz},$$
$$f_A = 117{,}146 \text{ kHz}.$$

Calcular la magnitud del módulo piezoeléctrico de la esfalerita.

6.48. La polarización espontánea de los cristales propiamente piroeléctricos se puede determinar según la magnitud de la polarización piezoeléctrica, condicionada por la compresión (tracción) hidrostática y también según la magnitud de su variación a costa de las dimensiones lineales del cristal. Hallar las correlaciones que permitan determinar la magnitud de la polarización espontánea para los cristales de turmalina y sulfato de litio.

6.49. Según la ecuación (6.28), el efecto piroeléctrico secundario («falso») en los cristales es condicionado por la dilatación térmica y las propiedades piezoeléctricas. Como es sabido, los cristales del cuarzo son piezoeléctricos, y todos los cristales, sin excepción alguna, comprendidos los cristales del cuarzo, experimentan una dilatación durante el calentamiento. ¿Si revelan los cristales del cuarzo el efecto piroeléctrico secundario?

6.50. Escribir la expresión del coeficiente del efecto piroeléctrico secundario experimentado por los cristales del tartrato de potasio.

6.51. Calcular la magnitud del coeficiente del efecto piroeléctrico secundario en los cristales de turmalina.

§ 7. PROPIEDADES ELÁSTICAS DE LOS CRISTALES. LA LEY DE HOOKE

Bajo la acción de las tensiones mecánicas los cristales experimentan deformaciones. Si la magnitud de la tensión es menor del valor límite, llamado límite de elasticidad, la deformación es reversible.

Siendo tensiones suficientemente pequeñas, la deformación es proporcional a la magnitud de la tensión aplicada. Si al cristal está aplicada una tensión uniforme arbitraria $[t_{kl}]$, la deformación homogénea surgida es tal que cada su componente r_{ij} está enlazada linealmente con todas las componentes del tensor de tensiones, es decir,

$$r_{ij} = s_{ijkl} t_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3). \tag{7.1}$$

La expresión (7.1) es la ley de Hooke en la forma generalizada. Aquí s_{ijkl} son las constantes de compresibilidad elástica del cristal. En total, hay 81 coeficientes s_{ijkl}. La ley de Hooke se puede escribir también en la forma

$$t_{ij} = c_{ijkl} r_{kl}, \tag{7.2}$$

donde c_{ijkl} son constantes de rigidez elástica del cristal. Los coeficientes s_{ijkl} y c_{ijkl} forman los tensores de cuarto rango. Esto significa que al ser cambiado el sistema de coordenadas X_1, X_2, X_3 por el X_1', X_2', X_3', los coeficientes s_{ijkl} (c_{ijkl}) se transforman en s'_{mnop} (c'_{mnop}) según la ley

$$s'_{mnop} = C_{mi} C_{nj} C_{ok} C_{pl} s_{ijkl}, \tag{7.2a}$$

donde C_{mi}, C_{nj}, C_{ok}, C_{pl} son los cosenos directores que determinan la orientación de los ejes X_1', X_2', X_3' respecto de los ejes X_1, X_2, X_3. Cada coeficiente s_{ijkl} (c_{ijkl}) tiene un sentido determinado y una magnitud numérica para el sistema dado de coordenadas, enlazado con el cristal. Si este sistema coincide con el sistema de coordenadas cristalofísico, los coeficientes se llaman fundamentales.

Debido a la simetría del tensor de las deformaciones y del tensor de las tensiones, las componentes de tensor s_{ijkl} y c_{ijkl} son simétricas respecto de los índices i y j, k y l, es decir,

$$s_{ijkl} = s_{jikl}, \quad c_{ijkl} = c_{jikl}, \tag{7.3}$$

$$s_{ijkl} = s_{ijlk}, \quad c_{ijkl} = c_{ijlk}. \tag{7.4}$$

Las correlaciones (7.3) y (7.4) reducen el número de las componentes independientes s_{ijkl} y c_{ijkl} hasta 36. Gracias a la simetría de s_{ijkl} y c_{ijkl} según los primeros dos y los últimos dos índices podemos utilizar las designaciones matriciales, introducidas en el § 6. Según éstas, las ecuaciones (7.1) y (7.2) pueden escribirse más brevemente:

$$\left.\begin{aligned} r_i &= s_{ij} t_j \quad (i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6), \\ t_i &= c_{ij} r_j \quad (i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6). \end{aligned}\right\} \tag{7.5}$$

La introducción de la expresión matricial disminuye el número de los sumandos del segundo miembro de la ecuación (7.1), pero impone la necesidad de introducir los multiplicadores 2 y 4 según la regla siguiente:

$$\left.\begin{aligned} &s_{ijkl} = s_{mn}, && \text{cuando } m \text{ y } n \text{ son iguales a } 1, 2, 3, \\ &2s_{ijkl} = s_{mn}, && \text{cuando } m \text{ o } n \text{ son iguales a } 4, 5, 6, \\ &4s_{ijkl} = s_{mn}, && \text{cuando } m \text{ y } n \text{ son iguales a } 4, 5, 6. \end{aligned}\right\} \quad (7.6)$$

Energía del cristal deformado. El trabajo realizado por unidad de volumen, siendo pequeña la variación de la deformación de cristal, se expresa por la fórmula $dW = t_i\, dr_i$.

Cuando este cambio de la deformación es isotérmico y reversible, dW se puede igualar al crecimiento de la energía libre $d\psi$, es decir,

$$d\psi = dW = t_i\, dr_i. \quad (7.7)$$

Si se cumple la ley de Hooke, la ecuación (7.7) toma la forma

$$d\psi = c_{ij} r_j\, dr_i,$$

por lo tanto,

$$\frac{d\psi}{dr_i} = c_{ij} r_j.$$

Diferenciando los dos miembros de la ecuación por r_j, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial r_j}\left(\frac{d\psi}{dr_i}\right) = c_{ij}.$$

Pero puesto que ψ sólo es la función de tal estado del cuerpo, que se determina por las componentes de deformación, el orden de la diferenciación no tiene importancia, por eso,

$$c_{ij} = c_{ji}. \quad (7.8)$$

Análogamente,

$$s_{ij} = s_{ji}. \quad (7.8a)$$

Gracias a la simetría de las matrices (c_{ij}) y (s_{ij}) el número de las rigideces y de las compresibilidades independientes disminuye aún más: de 36 a 21.

Integrando la correlación (7.7), obtenemos que el trabajo referido a la unidad de volumen del cristal necesario para crear la deformación r_i, la llamada energía de la deformación, es igual a

$$\frac{1}{2} c_{ij} r_i r_j. \quad (7.8b)$$

Exigencias que se imponen por la simetría. Debido a la simetría del cristal el número de los coeficientes independientes de s_{ij} y c_{ij} disminuye.

Las formas de las matrices de las compresibilidades elásticas pueden ser obtenidas, valiéndose del método de comprobación directa, que nos permite determinar el número de los coeficientes independientes para todas las clases, a excepción de las clases de las singonías trigonal y hexagonal, para las cuales es necesario utilizar el método analítico.

La forma de las matrices (s_{ij}) y (c_{ij}) para diferentes clases cristalográficas, así como para las texturas piezoeléctricas, se da en la tabla 9.

Correlaciones que enlazan los coeficientes s_{ij} y c_{ij}. Las constantes de compresibilidad elástica s_{ij} y de rigidez elástica c_{ij} están enlazadas por la correlación siguiente:

$$s_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}\Delta c_{ij}}{\Delta^c}, \qquad (7.9)$$

donde Δ^c es el determinante integrado por las constantes de rigideces elásticas:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{vmatrix};$$

Δc_{ij} es el menor obtenido de este determinante tachando la i-ésima línea y la j-ésima columna. Analógicamente

$$c_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}\Delta s_{ij}}{\Delta^s}. \qquad (7.9a)$$

Módulo de Young, el módulo de deslizamiento y el coeficiente de Poisson. Para describir las propiedades elásticas de los medios tanto isótropos como anisótropos se recurre a menudo a las siguientes constantes.

El módulo de Young E, que caracteriza las propiedades elásticas del medio en una dirección, se determina por la razón de la tensión mecánica por esta dirección a la magnitud de la deformación en la misma dirección.

El coeficiente de Poisson σ se define como la razón de la deformación de la compresión transversal a la deformación

de la tracción longitudinal, originadas por una tensión mecánica. El módulo de deslizamiento μ se define como la razón del esfuerzo de desplazamiento a la deformación por cizallamiento.

Para los medios isótropos, sólo dos de las constantes enumeradas son independientes. Para describir las propiedades elásticas de los cuerpos isótropos se utilizan con frecuencia las constantes λ y μ, llamadas constantes de Lamé; en este caso las constantes μ, λ, E y σ están enlazadas por las correlaciones siguientes:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \tag{7.10}$$

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \tag{7.11}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}. \tag{7.12}$$

Si las propiedades elásticas de los cuerpos isótropos las caracterizamos con la matriz (s_{ij}) (tabla 9), en este caso,

$$s_{11} = 1/E, \quad s_{12} = -\sigma/E, \quad 2(s_{11} - s_{12}) = 1/\mu;$$
$$c_{11} = 2\mu + \lambda, \quad c_{12} = \lambda. \tag{7.13}$$

Para los medios anisótropos, el módulo de Young en la dirección arbitraria X_3' es:

$$E = 1/s'_{3333}, \tag{7.14}$$

donde $s'_{3333} = C_{3i}C_{3j}C_{3k}C_{3l}s_{ijkl}$, y C_{3i}, C_{3j}, C_{3k}, C_{3l} son los cosenos directores del eje X_3' respecto del sistema cristalofísico de coordenadas, s_{ijkl} son los coeficientes fundamentales relacionados con el sistema cristalofísico de coordenadas.

Para todas las clases cristalográficas, incluidas las cúbicas, la magnitud del módulo de Young depende de la dirección.

El coeficiente de Poisson, en el caso de los medios anisótropos, es

$$\sigma^{hk} = \frac{s_{hk}}{s_{kk}} \tag{7.15}$$

y constituye la medida de la compresión lateral, paralela a X_h, que va acopmañada de una tracción paralela a X_k.

Superficies de índices de los coeficientes de elasticidad. Puesto que no se puede representar completamente las

propiedades elásticas de los cristales con una sola superficie, suelen formar la superficie de índices para un coeficiente de elasticidad cualquiera. Tal superficie demuestra de un modo claro la variación de este coeficiente en función de la dirección en el cristal.

Prácticamente, es importante la superficie que representa la variación del módulo de Young según la dirección. El radio vector de esta superficie es proporcional a la magnitud del módulo de Young en la dirección de radio vector.

Compresibilidad volumétrica y lineal de los cristales. Se llama compresibilidad volumétrica la disminución relativa del volumen del cristal bajo la acción de la presión hidrostática unitaria.

El tensor de tensión de la compresión volumétrica, o hidrostática, es

$$[t_{kl}] = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}, \text{ o } t_{kl} = -p\delta_{kl},$$

donde δ_{kl} es el símbolo de Kronecker.

Las deformaciones provocadas por la compresión hidrostática,

$$r_{ij} = -ps_{ijkl}\delta_{kl} = -ps_{ijkk}; \tag{7.16}$$

la compresión volumétrica $\Delta = \Delta V/V = r_{ii} = -ps_{iikk}$, donde V es el volumen del cristal. Por consiguiente, la compresibilidad volumétrica es igual a

$$-\frac{\Delta}{p} = s_{iikk}. \tag{7.17}$$

La compresibilidad lineal β es la disminución relativa de la longitud de un segmento en el cristal, actuando sobre éste una presión hidrostática unitaria.

La variación relativa de la longitud del segmento en la dirección arbitraria $\mathbf{n}$ (n_1, n_2, n_3) se escribe como $r_{ij}n_in_j$. Puesto que esta variación se debe a la acción de la presión hidrostática p, resulta que $r_{ij}n_in_j = -ps_{ijkk}n_in_j$. De aquí, la compresibilidad lineal es

$$\beta = s_{ijkk}n_in_j. \tag{7.18}$$

Determinación de los coeficientes s_{ij}. Si de un cristal se cortan unas láminas y barretas de orientación determinada respecto de los ejes cristalofísicos, sus propiedades elásticas

dependerán de un coeficiente cualquiera de los s_{ij}. Este coeficiente se puede medir directamente. Una lámina o barreta de orientación arbitraria tienen propiedades elásticas dependientes de varios coeficientes s_{ij}, es decir, se determinarán por la combinación lineal s_{ij}.

Para determinar los coeficiente s_{ij} se utilizan los métodos estáticos y dinámicos. Los métodos estáticos se basan en la medición de las deformaciones estáticas, utilizando métodos ópticos, eléctricos y otros, y nos dan los valores de los coeficientes isotérmicos s_{ij}^T.

Los métodos dinámicos que consisten en medir las frecuencias resonantes de los vibradores cristalinos (véase el § 6) o la velocidad del sonido son de mayor precisión y dan los valores de los coeficientes adiabáticos s_{ij}^s.

Los coeficientes s_{ij}^s están enlazados con los coeficientes s_{ij}^T mediante la correlación

$$s_{ij}^s - s_{ij}^T = \frac{\alpha_i \alpha_j T}{\rho c_p}, \qquad (7.19)$$

donde α_i, α_j son los coeficientes de la dilatación térmica, c_p es la capacidad calorífica medida a una presión constante, T es la temperatura absoluta. Combinando experimentos estáticos y dinámicos, podemos determinar todos los coeficientes de elasticidad s_{ij}.

Ejemplos de solución de los ploblemas

7.1. Determinar la forma de la matriz de los coeficientes elásticos s_{ij} de la clase de simetría 222 a que pertenecen los cristales de la sal de Seignette.

Solución. Para hallar los coeficientes independientes de la compresibilidad elástica s_{ij} de la sal de Seignette se recurrirá al método de comprobación directa. Puesto que los coeficientes s_{ij} son simétricos respecto a la permutación de los índices i y j ($s_{ij} = s_{ji}$), podemos omitir la mitad inferior de la matriz (s_{ij}), es decir, examinar los coeficientes

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ & & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ & & & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ & & & & s_{55} & s_{56} \\ & & & & & s_{66} \end{pmatrix}$$

Apuntemos la tabla de los índices que corresponde a la mitad derecha superior de la matriz (s_{ij}):

11	12	13	14	15	16
	22	23	24	25	26
		33	34	35	36
			44	45	46
				55	56
					66

La simetría del grupo puntual 222 se determina por completo por los dos ejes de segundo orden que coinciden con los ejes cristalofísicos X_3 y X_1(o por otro par cualquiera de los ejes de simetría 2), el tercer eje se engendra por la combinación de los dos ejes anteriores (véase la tabla 4).

Examinemos al principio la acción del eje 2 paralelo al X_3. Esta transformación puede escribirse así:

$$X \to -X_1', \quad X_2 \to -X_2', \quad X_3 \to X_3'$$

o de un modo más conciso,

$$1 \to -1, \quad 2 \to -2, \quad 3 \to 3.$$

Cuando la designación es de cuatro índices, los pares de éstos se transforman según la regla

$$11 \to 11, \quad 22 \to 22, \quad 33 \to 33,$$
$$23 \to -23, \quad 31 \to -31, \quad 12 \to 12.$$

Siendo la designación de dos índices que se emplea para la representación matricial, las transformaciones de los índices tienen, respectivamente, la forma

$$1 \to 1, \quad 2 \to 2, \quad 3 \to 3,$$
$$4 \to -4, \quad 5 \to -5, \quad 6 \to 6.$$

Entonces, la tabla de los índices se transforma así:

11	12	13	−14	−15	16
	22	23	−24	−25	26
		33	−34	−35	36
			44	45	−46
				55	−56
					66

Comparando esta tabla, elemento tras elemento, con la tabla inicial y teniendo en cuenta que los coeficientes s_{ij} durante esta transformación deben convertirse en sí mismos, obtenemos la matriz siguiente:

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & s_{16} \\ & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & s_{26} \\ & & s_{33} & 0 & 0 & s_{36} \\ & & & s_{44} & s_{45} & 0 \\ & & & & s_{55} & 0 \\ & & & & & s_{66} \end{pmatrix}.$$

Examinemos la acción del eje 2 paralelo al eje cristalofísico X_1:

$$1 \to 1, \quad 2 \to -2, \quad 3 \to -3.$$

Los pares de los índices se transforman según la regla

$$11 \to 11, \quad 22 \to 22, \quad 33 \to 33,$$
$$23 \to 23, \quad 31 \to -31, \quad 12 \to -12$$

o para la designación de dos índices:

$$1 \to 1, \quad 2 \to 2, \quad 3 \to 3,$$
$$4 \to 4, \quad 5 \to -5, \quad 6 \to -6.$$

Es evidente que ahora se transformarán en cero aquellos coeficientes s_{ij} que tienen en sus índices una cifra 5 ó 6, es decir, todos los s_{i5} y todos los s_{i6}.

En conformidad con esto obtenemos la siguiente matriz de los coeficientes s_{ij} para la sal de Seignette:

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & s_{44} & 0 & 0 \\ & & & & s_{55} & 0 \\ & & & & & s_{66} \end{pmatrix}.$$

La matriz contiene nueve coeficientes independientes s_{ij}.

7.2. Un cristal de cuarzo está sometido a la compresión uniaxial t: a) a lo largo de la dirección $[2\bar{1}\bar{1}0]$, b) a lo largo

de la dirección [0001]. Hallar el carácter de las deformaciones elásticas que experimenta el cristal.

Solución. Según las reglas de la elección de los ejes cristalofísicos, en los cristales de la clase 32, el eje X_1 se dirige por el eje 2, el eje X_3, por el eje 3 (véase la tabla 4).

Para hallar el carácter de las deformaciones que experimenta el cuarzo durante su compresión a lo largo de las direcciones indicadas, hay que utilizar la ley de Hooke (7.5).

Durante la compresión del cuarzo a lo largo de la dirección $[2\bar{1}\bar{1}0]$, es decir, a lo largo del eje 2 que coincide con el X_1, el tensor de tensiones mecánicas tiene diferente de cero la única componente t_1, y durante la compresión a lo largo de la dirección [0001], la componente t_3. En conformidad con la forma de la matriz de constantes de la compresibilidad elástica (véase la tabla 9), durante la compresión por $[2\bar{1}\bar{1}0]$, es decir, a lo largo del eje X_1 obtenemos las deformaciones siguientes:

$$r_1 = s_{11}t_1, \quad r_2 = s_{12}t_2, \quad r_3 = s_{13}t_3,$$

es decir, las deformaciones de compresión (extensión) a lo largo de los ejes cristalofísicos (el signo de las deformaciones dependerá del signo de las constantes de compresibilidad elástica) y, también, $r_4 = s_{14}t_1$, es decir, la deformación de cortadura en el plano X_2X_3. Para el cuarzo, $s_{11} > 0$, $s_{12} < 0$, $s_{13} < 0$, por eso, el cuarzo experimentará una deformación de tracción a lo largo del eje X_1 y la otra, de compresión a lo largo de los ejes X_2 y X_3.

Durante la compresión a lo largo de la dirección [0001] que coincide con el eje de simetría 3:

$$r_1 = r_2 = s_{13}t_3, \quad r_3 = s_{33}t_3,$$

es decir, obtendremos la deformación de compresión a lo largo de los ejes X_1 y X_2 (puesto que $s_{13} < 0$) y la deformación de tracción a lo largo del eje X_3 (siendo $s_{33} > 0$).

7.3. a) Hallar las direcciones correspondientes a los valores máximos del módulo de Young para los cristales cúbicos y, también, las direcciones que correspondan a los valores mínimos de esta magnitud, aceptando $\left(s_{11} - s_{12} - \frac{1}{2}s_{44}\right) > 0$.

b) Caracterizar la superficie de índices del módulo de Young.

c) ¿Qué forma tienen las secciones de esta superficie por los planos de tipo (111)?

Solución. a) La magnitud inversa al módulo de Young en una lámina de orientación arbitraria se plantea, según (7.2a) y (7.14), por la expresión

$$s'_{33} = s'_{3333} = C_{3i}C_{3j}C_{3k}C_{3l}s_{ijkl} \quad \text{o} \quad s'_{3333} = n_i n_j n_k n_l s_{ijkl},$$

donde C_{3i}, C_{3j}, C_{3k}, C_{3l} son los cosenos directores de la dirección n que nos interesa; s_{ijkl}, constantes de la compresibilidad elástica de los cristales cúbicos.

En el sistema cristalofísico de coordenadas, la matriz (s_{ij}), para todas las clases de la singonía cúbica, tiene la forma (véase la tabla 9)

$$s_{ij} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{12} & s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} \end{pmatrix}.$$

Escribamos las constantes de la compresibilidad elástica que son diferentes de cero en la respresentación tensorial:

$$s_{1111} = s_{2222} = s_{3333},$$
$$s_{1122} = s_{2233} = s_{1133},$$
$$s_{2323} = s_{3131} = s_{2121}.$$

Al colocar en la expresión para s'_{3333} las constantes de la compresibilidad elástica, diferentes del cero y al pasar a la designación matricial, obtenemos

$$s'_{33} = s_{11}(C_{31}^4 + C_{32}^4 + C_{33}^4) + \\ + (s_{44} + 2s_{12})(C_{32}^2 C_{33}^2 + C_{33}^2 C_{31}^2 + C_{31}^2 C_{32}^2).$$

Hagamos algunas simplificaciones:

$$C_{31}^4 = C_{31}^2(1 - C_{32}^2 - C_{33}^2) = C_{31}^2 - C_{31}^2 C_{32}^2 - C_{31}^2 C_{33}^2,$$
$$C_{32}^4 = C_{32}^2(1 - C_{31}^2 - C_{33}^2) = C_{32}^2 - C_{32}^2 C_{31}^2 - C_{32}^2 C_{33}^2.$$

Y, por fin,

$$C_{33}^4 = C_{33}^2(1 - C_{31}^2 - C_{32}^2) = C_{33}^2 - C_{31}^2 C_{33}^2 - C_{33}^2 C_{32}^2.$$

Colocando las expresiones para C_{31}^4, C_{32}^4 y C_{33}^4 en la ecuación anterior, obtenemos

$$s'_{33} = s_{11} - 2s_{11}(C_{32}^2 C_{33}^2 + C_{33}^2 C_{31}^2 + C_{31}^2 C_{32}^2) + \\ + (s_{44} - 2s_{12})(C_{32}^2 C_{33}^2 + C_{33}^2 C_{31}^2 + C_{31}^2 C_{32}^2) = \\ = s_{11} - 2\left(s_{11} - s_{12} - \frac{1}{2}s_{44}\right)(C_{31}^2 C_{32}^2 + C_{32}^2 C_{33}^2 + C_{31}^2 C_{33}^2)$$

o

$$s'_{33} = s_{11} - 2\left(s_{11} - s_{12} - \frac{1}{2}s_{44}\right)(n_1^2 n_2^2 + n_2^2 n_3^2 + n_1^2 n_3^2).$$

Por consiguiente, el módulo de Young para los cristales cúbicos depende de la dirección y es función de la magnitud

$$(n_1^2 n_2^2 + n_2^2 n_3^2 + n_1^2 n_3^2).$$

b) Hallemos el máximo de esta magnitud, utilizando el método de los factores indefinidos de Lagrange. Compongamos la función

$$f = n_1^2 n_2^2 + n_2^2 n_3^2 + n_3^2 n_1^2 - \lambda(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 1).$$

Diferenciándola por n_1^2, n_2^2 y n_3^2 e igualando las derivadas al cero, obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial n_1^2} = n_2^2 + n_3^2 - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial n_2^2} = n_3^2 + n_1^2 - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial n_3^2} = n_2^2 + n_1^2 - \lambda = 0.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtenemos

$$n_2^2 + n_3^2 = n_3^2 + n_1^2 = n_2^2 + n_1^2 = \lambda.$$

De ahí se deduce que $n_1^2 = n_2^2 = n_3^2 = 1/3$.

$$n_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad n_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad n_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Así pues, hay ocho direcciones que corresponden al valor máximo de la magnitud $(n_1^2 n_2^2 + n_2^2 n_3^2 + n_3^2 n_1^2)$:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \quad \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, -1), \quad \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1),$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1), \quad \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1), \quad \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1),$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1), \quad \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, -1).$$

Esto significa que si la magnitud $(s_{11} - s_{12} - 1/4s_{44})$ es positiva, como lo es para todos los cristales cúbicos (a excepción de los cristales de molibdeno), el valor máximo del módulo de Young corresponde a las direcciones de tipo [111].

Es evidente que la magnitud mínima del módulo de Young corresponde a las direcciones de tipo [100], para las cuales la magnitud $(n_1^2n_2^2 + n_2^2n_3^2 + n_3^2n_1^2)$ se reduce a cero. Basándonos en lo antedicho, podemos deducir que la superficie de índices del módulo de Young tendrá la forma de cubo de ángulos redondeados con las concavidades en los centros de las caras.

c) Hallemos la forma de la sección de esta superficie por el plano (111). Supongamos que el vector unitario $\mathbf{n}\ (n_1, n_2, n_3)$ es perpendicular a la dirección [111]. Esto significa que $n_1 + n_2 + n_3 = 0$, es decir, $n_3 = -(n_1 + n_2)$. Pero $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$; de aquí

$$n_1^2 + n_2^2 + (n_1 + n_2)^2 = 2n_1^2 + 2n_2^2 + 2n_1n_2 = 1$$

o

$$n_1^2 + n_2^2 + n_1n_2 = \frac{1}{2}.$$

Teniendo en cuenta esta igualdad, transformemos la expresión $n_1^2n_2^2 + n_2^2n_3^2 + n_3^2n_1^2$:

$$n_1^2n_2^2 + n_2^2n_3^2 + n_3^2n_1^2 = n_1^2n_2^2 + (n_1^2 + n_2^2)(1 - n_1^2 - n_2^2) =$$

$$= n_1^2n_2^2 + n_1^2 + n_2^2 - (n_1^2 + n_2^2) = n_1^2 + n_2^2 + n_1n_2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

De este modo, la magnitud del módulo de Young en el plano perpendicular a la dirección [111], no depende de la dirección, y las secciones de la superficie de índices del módulo de Young, perpendiculares a las direcciones [111], son circunferencias.

7.4. a) ¿Cuáles de los coeficientes elásticos de los cristales cúbicos pueden ser definidos según los resultados de las mediciones de la magnitud de la deformación longitudinal así como las magnitudes de la compresión volumétrica $\Delta V/V$ de las probetas cristalinas que experimentan la tensión de una compresión uniaxial t en la dirección de tipo [100]?

b) ¿Si depende la magnitud de la compresión volumétrica de los cristales cúbicos de la dirección de la acción de una tensión mecánica uniaxial?

Solución. a) Si la tensión mecánica uniaxial actúa sobre el cristal cúbico en la dirección [100], esto quiere decir que en el sistema cristalofísico de coordenadas sólo una componente del tensor de tensión t_1, es diferente de cero. Por eso, según los resultados de las mediciones de la magnitud de la deformación longitudinal r_1, según (7.5), puede ser definido el coeficiente $s_{11} = r_1/t_1$. La magnitud de la compresión volumétrica $\Delta V/V = r_{ll}$ es igual en este caso a $(2s_{12} + s_{11})\ (-p)$, por lo tanto, según los resultados de su medición podemos determinar el coeficiente s_{12}.

b) Apliquemos la tensión uniaxial t por una dirección **n** (n_1, n_2, n_3) arbitraria respecto al sistema cristalofísico de coordenadas.

Dirijamos a lo largo de **n** el eje X_3' del sistema rayado nuevo de coordenadas, en este caso el estado de tensión en el sistema nuevo de coordenadas se describirá por el tensor

$$t'_{kl} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}, \quad \text{donde } t = t'_{33}.$$

Hallemos la forma del tensor de tensiones en el sistema cristalofísico de coordenadas utilizando la ley de transformación de las componentes del tensor de segundo rango, al pasar del sistema de coordenadas nuevo al viejo: $t_{ij} = C_{ki}C_{lj}t'_{kl}$. Para el caso dado

$$t_{ij} = C_{3i}C_{3j}t'_{33} = n_i n_j t.$$

Determinemos la variación del volumen del cristal cúbico bajo la acción de una tracción uniaxial en la dirección arbitraria. Puesto que $\Delta V/V = r_{ll} = r_{11} + r_{22} + r_{33}$, siendo

$$r_{11} = t\,(s_{1111}n_1^2 + s_{1122}n_2^2 + s_{1133}n_3^2),$$
$$r_{22} = t\,(s_{2211}n_1^2 + s_{2222}n_2^2 + s_{2233}n_3^2),$$
$$r_{33} = t\,(s_{3311}n_1^2 + s_{3322}n_2^2 + s_{3333}n_3^2).$$

o en la representación matricial,

$$r_1 = t\,(s_{11}n_1^2 + s_{12}n_2^2 + s_{13}n_3^2),$$
$$r_2 = t\,(s_{21}n_1^2 + s_{22}n_2^2 + s_{23}n_3^2),$$
$$r_3 = t\,(s_{31}n_1^2 + s_{32}n_2^2 + s_{33}n_3^2),$$

y teniendo en cuenta que para los cristales cúbicos

$$s_{11} = s_{22} = s_{33}, \quad s_{12} = s_{13} = s_{23},$$

obtenemos

$$\frac{\Delta V}{V} = r_1 + r_2 + r_3 = t\,(s_{11}n_1^2 + s_{12}n_2^2 + s_{12}n_3^2 + \\ + s_{12}n_1^2 + s_{11}n_2^2 + s_{12}n_3^2 + s_{12}n_1^2 + s_{12}n_2^2 + s_{11}n_3^2).$$

Siendo $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, *obtenemos*

$$\frac{\Delta V}{V} = t\,(s_{11} + 2s_{12}).$$

Así pues, la variación del volumen del cristal cúbico bajo la *acción de una tensión uniaxial no depende de la dirección* de tracción.

7.5. La definición de valores de los coeficientes de compresibilidad elástica de cristales del cuarzo sintético se ha

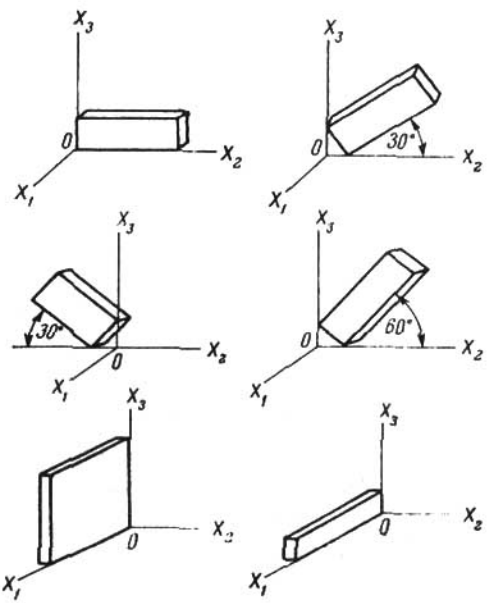


Fig. 7.1.

realizado, midiendo las frecuencias resonantes en las seis probetas orientadas de modo distinto, representadas en la fig. 7.1. Los resultados de las mediciones se dan en la tabla que va abajo.

Valiéndose de los datos experimentales indicados, calcular los valores de todos los coeficientes independientes de la compresibilidad elástica del cuarzo.

Solución. Para los cristales del cuarzo que pertenecen a la clase 32 se determinarán los seis coeficientes independientes de la compresibilidad elástica (véase la tabla 9):

$$s_{11},\quad s_{12},\quad s_{13},\quad s_{33},\quad s_{44}\ \text{y}\ s_{14}.$$

La magnitud s_{11}^E, que para el cuarzo es igual a s_{22}^E, se define partiendo directamente de los datos de la sección X. La ecuación de la excitación piezoeléctrica de esta sección es $r_2 = s_{22}^E t_2 + d_{12}E_1$, por eso, la frecuencia resonante de las oscilaciones longitudinales de la sección X, alargada en la dirección del eje X_2 se define por la correlación $f_R = 1/(2l\sqrt{\rho s_{22}^E})$; de ahí

$$s_{22}^E = \frac{1}{4f_R^2 l^2 \rho}.$$

Orientación de la sección (véase la fig. 7.1)	Tipo de oscilaciones	Dimensiones en la dirección de oscilaciones, en mm	Frecuencia resonante, en kHz
sección X	Compresión — tracción longitudinal	30,04	89,215
sección X de 30°	»	32,18	80,52
sección X de —30°	»	20	168,5
sección X de 60°	»	20,05	150
sección Y	Deslizamiento por la cara	1,6	1453
»	Deslizamiento por el grosor	1,05	1825

Colocando en esta expresión el valor de la longitud de la sección X (en cm), el de la frecuencia resonante (en Hz) y el de la densidad del cuarzo (en g/cm³), obtenemos

$$s_{22}^{E} = 131 \cdot 10^{-14} \text{ cm}^2/\text{din} = s_{11}^{E}.$$

Para las probetas largas y finas de secciones X «giradas» cuyo grosor está dirigido a lo largo del eje X_1 y la longitud está tomada por la dirección X_2', la ecuación de la excitación piezoeléctrica se escribe en la forma $r_2' = s_{22}' t_2' + d_{12}' E_1$, donde r_2', s_{22}', t_2' son la deformación, la compresibilidad elástica y la tensión mecánica, respectivamente, en la dirección de la longitud de las probetas de las secciones X «giradas».

La tabla de los cosenos directores de los ejes enlazados con las aristas de estas secciones, respecto de los ejes cristalofísicos, es:

Ejes	X_1	X_2	X_3
X_1'	1	0	0
X_2'	0	cos φ	sen φ
X_3'	0	—sen φ	cos φ

Aquí $\varphi = 30°$ para la sección X de 30°; $\varphi = -30°$ para la sección X de —30°; $\varphi = 60°$ para la sección X de 60°. Para estas secciones

$$s_{22}' = s_{2222}' = C_{2i}C_{2j}C_{2k}C_{2l}s_{ijkl} = s_{11}\cos^4\varphi + s_{33}\operatorname{sen}^4\varphi + \\ + 2s_{14}\cos^3\varphi \operatorname{sen}\varphi + (2s_{13} + s_{44})\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi.$$

(Para la sección X de 30° sen $\varphi = 1/2$, cos $\varphi = \sqrt{3}/2$.)

Puesto que las probetas de orientaciones indicadas realizan oscilaciones de compresión—tracción en la dirección de la longitud que es el eje X_2', $s_{22}'^{E} = 1/4f^2{}_R l^2 \rho$. Para la sección X de 30°, $s_{22}' = 139{,}6 \cdot 10^{-14}$ cm²/din; para la sección X de —30° $s_{22}' = 84 \cdot 10^{-14}$ cm²/din; para la sección X de 60° $s_{22}' = 104{,}5 \times 10^{-14}$ cm²/din.

Restando la expresión $s_{22(30°)}'$ de la expresión $s_{22(-30°)}'$, obtenemos

$$s_{22(-30°)}' - s_{22(30°)}' = \frac{3}{4}\sqrt{3}\, s_{14}.$$

De aquí

$$s_{14} = 42{,}6 \cdot 10^{-14} \text{ cm}^2/\text{din}.$$

Para obtener las magnitudes de los demás coeficientes de la compresibilidad elástica del cuarzo se han definido los módulos de deslizamiento, que, a su vez, han sido calculados por las conocidas frecuencias resonantes de las oscilaciones de deslizamiento por el grosor y a lo largo de la cara de las probetas de la sección Y. Aplicando el campo a las caras activas de las probetas de la sección Y ($E_1 = E_3 = 0$, $E_2 \neq 0$) surgen las deformaciones de los dos tipos r_5 (r_{13}) y r_6 (r_{12}). *Las dos deformaciones son las deformaciones de* cortadura, con la particularidad de que la deformación r_5, que es responsable de la deformación de la lámina cristalina en el plano X_1X_3, se llama la deformación de cortadura a lo largo de la cara, y la deformación r_6, responsable de la deformación en el plano X_1X_2, se llama la deformación de cortadura por el grosor; los dos tipos de estas oscilaciones se excitan fácilmente.

Restando de la expresión duplicada para $s'_{22(60°)}$ la expresión para $s'_{22(30°)}$ y $s'_{22(30°)}$, obtenemos

$$2s'_{22(60°)} - s'_{22(30°)} - s'_{22(-30°)} = -s_{11} + s_{33} - \frac{\sqrt{3}}{4} s_{14};$$

de ahí

$$s_{33} = 2s'_{22(60°)} - [s'_{22(-30°)} + s'_{22(30°)}] + s_{11} + \frac{\sqrt{3}}{4} s_{14} =$$
$$= 98{,}6 \cdot 10^{-11} \text{ cm}^2/\text{din}.$$

Hallamos ahora $(2s_{13} + s_{44})$, restando de la expresión para $s'_{22(30°)}$ los *sumandos que contienen los coeficientes* s_{11}, s_{33}, s_{14}, definidos ya por nosotros:

$$2s_{13} + s_{44} = \frac{1}{3}(16\ s'_{22(30°)} - 9s_{11} - s_{33} - 6\sqrt{3}\, s_{12}).$$

Colocando los valores numéricos de las magnitudes $s'_{22(30°)}$, s_{11}, s_{33} y s_{13}, obtenemos

$$2s_{13} + s_{44} = 167{,}3 \cdot 10^{-14} \text{ cm}^2/\text{din}.$$

Por la magnitud de la frecuencia resonante de las oscilaciones de deslizamiento por el grosor de la probeta de la sección Y podemos calcular el coeficiente de la rigidez elástica c_{66}; por la magnitud de la frecuencia resonante de las oscilaciones de deslizamiento a lo largo de la cara, el coeficiente c_{44}:

$$c_{66} = 4f_R^2 (d^2)\, \rho = 39 \cdot 10^{10} \text{ din/cm}^2;$$
$$c_{55} = c_{44} = 4f_R^2 (l^2)\, \rho = 57{,}1 \cdot 10^{10} \text{ din/cm}^2.$$

Para pasar de los coeficientes c_{ij} a los coeficientes s_{ij}, hay que utilizar las correlaciones (7.9 a) que enlazan estos coeficientes.

Hallemos el enlace de los coeficientes c_{44} y c_{66} con los coeficientes s_{ij}:

$$c_{44} = \frac{s_{11} - s_{12}}{s_{44}(s_{11} - s_{12}) - 2s_{14}^2},$$

$$c_{66} = \frac{c_{11} - c_{12}}{2} = \frac{s_{44}}{2s_{44}(s_{11} - s_{12}) - 2s_{14}^2}.$$

De ahí

$$s_{44} = \frac{1}{c_{44}} + \frac{2s_{14}^2}{\frac{1}{4c_{66}} + \sqrt{\frac{1}{(4c_{66})^2} + \frac{s_{14}^2 c_{44}}{c_{66}}}},$$

$$(s_{11} - s_{12}) = \frac{1}{4c_{66}} + \sqrt{\frac{1}{(4c_{66})^2} + \frac{s_{14}^2 c_{44}}{c_{66}}}.$$

Colocando en las últimas expresiones los valores de las magnitudes medidas, obtenemos (en cm²/din) $s_{44} = 199{,}3 \cdot 10^{-14}$, $s_{11} - s_{12} = 145{,}6 \cdot 10^{-14}$, $s_{12} = -14 \cdot 10^{-14}$.

Si sabemos s_{44}, el coeficiente s_{13} lo encontraremos por medio de la correlación

$$2s_{13} + s_{44} = 167{,}3 \cdot 10^{-14} \text{ cm}^2/\text{din}.$$

De ahí $s_{13} = -16 \cdot 10^{-14}$ cm²/din.

Así pues, efectuadas seis mediciones de las frecuencias resonantes de las probetas cristalinas de diferente orientación del cuarzo sintético, hemos definido seis coeficientes independientes s_{ij}.

Puesto que las láminas cristalinas se excitaron como resultado del efecto piezoeléctrico inverso, al hacerse estas mediciones, obtenemos los coeficientes elásticos medidos a un valor constante del campo, es decir, los coeficientes s_{ij}^E (en cm²/din):

$$s_{11}^E = 131 \cdot 10^{-14}, \quad s_{12}^E = -14 \cdot 10^{-14}, \quad s_{13}^E = -16 \cdot 10^{-14},$$
$$s_{33}^E = 98{,}6 \cdot 10^{-14}, \quad s_{14}^E = -42{,}6 \cdot 10^{-14}, \quad s_{44}^E = 199{,}3 \cdot 10^{-14}.$$

7.6. La medición de los coeficientes elásticos de la esfalerita se ha realizado a la temperatura normal por el método dinámico en las tres barretas, orientadas de modo diferente, de la sección Z, representadas en la fig. 7.2. Los electrodos se han aplicado a sus caras activas. Los resultados mediados de mediciones se han agrupado en una tabla.

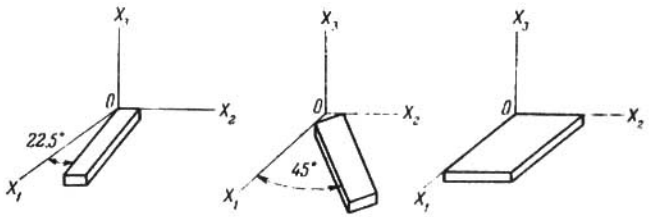


Fig. 7.2.

Basándose en los datos citados, calcular los valores de los coeficientes de compresibilidad elástica de la esfalerita.

Orientación de la sección (véase la fig. 7.2)	Dimensiones, en mm			Tipo de oscilaciones	f_R resonante y f_A antirresonante, en kHz	Permeabilidad dieléctrica relativa del cristal libre
	l	t	d			
sección Z de 22,5°	20	2,7	1,0	Oscilaciones longitudinales en frecuencia fundamental	$f_R = 101,7$	
sección Z de 45°	20	2,7	1,0	Idem	$f_R = 117$ $f_A = 117,146$	8,37
sección Z de 0°	30	6,0	1,0	Oscilaciones de deslizamiento a lo largo de la cara en frecuencia fundamental	$f_R = 279$	

Solución. Los cristales de esfalerita (grupo puntual de simetría $\bar{4}3\,m$) se caracteriza con los tres coeficientes de compresibilidad elástica: s_{11}, s_{12} y s_{44}. Todos los coeficientes indicados pueden ser medidos en las tres barretas de orientación diferente.

Como demuestra el dibujo, todas las tres barretas están cortadas perpendicularmente al eje X_3, uno de los tres ejes cristalofísicos equivalentes, que son los ejes de inversión de la simetría de cuarto orden. Las longitudes de las prime-

ras dos barretas, llamadas secciones Z «giradas», son mayores en comparación con su anchura y grosor. Puesto que el cristal de esfalerita es piezoeléctrico, la aplicación del campo eléctrico alternativo a las caras activas de estas barretas excita en ellas las oscilaciones de compresión—tracción en la dirección de su longitud que se elige en calidad del eje X_1'. En este caso el coeficiente de elasticidad de las láminas indicadas será la magnitud s_{11}'. Según (6.23), la frecuencia resonante de las oscilaciones longitudinales en la frecuencia fundamental es

$$f_R = \frac{1}{2l\sqrt{\rho s_{11}'^E}};$$

por eso, midiendo las frecuencias resonantes de tales barretas, se determinarán directamente los coeficientes $s_{11}'^E$. La orientación de los ejes X_1', X_2', X_3' enlazados con las aristas de las barretas de las secciones Z «giradas» respecto de los ejes cristalofísicos de esfalerita, se da en la siguiente tabla de los cosenos directores:

Ejes	X_1	X_2	X_3
X_1'	cos φ	sen φ	0
X_2'	—sen φ	cos φ	0
X_3'	0	0	1

El coeficiente de compresibilidad elástica s_{11}' en la dirección de la longitud de las barretas de las secciónes Z «giradas» se puede hallar de la ec. (7.2 a) que en el caso dado es

$$s_{11}'^E = s_{11}(\cos^4\varphi + \operatorname{sen}^4\varphi) + (2s_{12} + s_{44}^E)\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi.$$

El coeficiente s_{44} se define mediante la lámina de la sección Z de $0°$, cuya longitud es mucho mayor que su anchura, en que se excitan las oscilaciones de deslizamiento a lo largo de la cara (así llamadas oscilaciones de circuito). La frecuencia resonante de las oscilaciones de deslizamiento a lo largo de la cara se define por la correlación

$$f_R = \frac{1}{2t}\sqrt{\frac{c_{66}}{\rho}};$$

donde t es la anchura de la lámina.

Para los cristales cúbicos $c_{66} = c_{44} = 1/s_{44}$; de ahí

$$s_{44} = \frac{1}{(2lf_R)^2 \rho}.$$

Utilizando las correlaciones citadas, así como los datos experimentales y de las tablas, podemos calcular todas las constantes elásticas de la esfalerita.

Por medio de la correlación para las frecuencias resonantes de las barretas oscilantes de modo longitudinal de las secciones Z «giradas» hallamos los valores de s'^E_{11}:

$$s'^E_{11} = \frac{1}{(2lf_R)^2 \rho}.$$

Por lo tanto,

$$s'^E_{11(22,5°)} = 14{,}73 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^2/\text{din},$$
$$s'^E_{11(45°)} = 11{,}08 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^2/\text{din}.$$

Por otro lado,

$$s'^E_{11} = s_{11}(\cos^4 \varphi + \operatorname{sen}^4 \varphi) + (2s_{12} + s^E_{44}) \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \varphi;$$

para la sección Z de 22,5° sen $\varphi = 0{,}3827$, cos $\varphi = 0{,}9239$, $s'^E_{11} = 0{,}75\, s_{11} + 0{,}125\ (2s_{12} + s^E_{44})$; para la sección Z de 45° sen $\varphi = \cos \varphi = 0{,}7071$, $s'^E_{11} = 0{,}5\, s_{11} + 0{,}25\ (2s_{12} + s^E_{44})$.

Resolviendo estas ecuaciones respecto de s_{11} y $(2s_{12} + s^E_{44})$, hallamos

$$s_{11} = 2s'^E_{11(22,5°)} - s'^E_{11(45°)} = 18{,}42 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^2/\text{din},$$
$$(2s_{12} + s^E_{44}) = 6s'^E_{11(45°)} - 4s'^E_{11(22,5°)}.$$

La magnitud s^E_{44} se define por los datos para la sección Z de 0°:

$$s^E_{44} = \frac{1}{(2 \cdot 0{,}6 \cdot 279 \cdot 10^3)^2 \cdot 4{,}102} = 21{,}7 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^2/\text{din}.$$

Ahora determinemos

$$s^E_{12} = \frac{(7{,}56 - 21{,}7) \cdot 10^{-13}}{2} = -7{,}07 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^2/\text{din}.$$

De este modo, los coeficientes de compresibilidad elástica de esfalerita son (en unid. CGSE):

$$s^E_{11} = 18{,}42 \cdot 10^{-13}, \quad s^E_{12} = -7{,}07 \cdot 10^{-13}, \quad s^E_{44} = 21{,}7 \cdot 10^{-13}.$$

Problemas

7.7. ¿En qué grupos de componentes, análogas por su sentido físico, podemos dividir la matriz de compresibilidades elásticas (s_{ij}) de los cristales triclínicos?

7.8. Aprovechando la tabla 9, contestar a las preguntas:

a) ¿Los cristales de que simetría experimentarán las deformaciones de cortadura bajo la acción de una compresión multilateral?

b) ¿Si podemos, mediante una compresión multilateral, cambiar sólo la forma de la probeta cristalina sin cambiar su volumen?

7.9. Utilizando el método de comprobación directa, demostrar que la matriz (s_{ij}) para los cristales del grupo KDP tiene seis componentes independientes.

7.10. La tensión de compresión de 150 kgf/cm² está aplicada al cristal de clorato de sodio a lo largo de uno de los ejes de segundo orden.

Determinar la deformación relativa que experimenta el cristal a lo largo de las direcciones de tipo [111].

7.11. Un cristal de clorato de sodio está sometido a la acción de esfuerzo tractor uniaxial de 10^2 kgf/cm² en una *dirección arbitraria*.

¿Cuántos grados hay que calentar este cristal para que el cambio relativo de su volumen sea igual que en el caso de la deformación del cristal bajo la acción de la tracción uniaxial indicada?

7.12. Como resultado del efecto piezoeléctrico inverso la lámina de la sección L de ADP (véase la fig. 2.4) experimenta una deformación relativa de compresión por el grosor, igual a $6 \cdot 10^{-3}$. Caracterizar el estado de tensión de la lámina en el sistema cristalofísico de coordenadas.

7.13. Calcular la compresibilidad volumétrica de los cristales de turmalina y de la sal de Seignette; comparar estas magnitudes.

7.14. *Determinar el módulo de Young en la dirección de los ejes cristalofísicos* X_1 y X_3 y en la dirección de la longitud de la barreta, que representa una sección Z de ADP de 45° (véase la fig. 6.3.).

7.15. Hallar la ecuación de la superficie de índices del coeficiente s'_{33} (magnitud inversa al módulo de Young) para los cristales del cuarzo. ¿Qué forma tiene la sección de esta superficie por el plano X_1X_2?

7.16. Escribir la ecuación de la superficie de índices del coeficiente s'_{33} (magnitud inversa al módulo de Young) para los cristales de wurtzita. ¿Qué es lo que podemos decir de la simetría de esta superficie?

7.17. La lámina de cuarzo de la sección X (véase la fig. 2.3.) de las dimensiones de $1 \times 1 \times 0{,}3$ cm³, se comprime por la fuerza de 80 kgf. Hallar el trabajo efectuado durante la deformación.

7.18. Un cubo de aristas de 1 cm está cortado del cristal de cuarzo. El cubo está sometido a una compresión multilateral cuyo esfuerzo es de 50 kgf/cm². ¿Cómo se ha cambiado la energía interna del cubo deformado?

7.19. Hallar la energía de deformación de un cubo monocristalino de silicio sometido a la acción de una compresión uniaxial por la dirección designada respecto el sistema cristalofísico de coordenadas por los cosenos directores (0,705; 0,705; 0).

7.20. Demostrar que la magnitud inversa a la compresibilidad para los cristales cúbicos está enlazada con las constantes de rigidez elástica mediante la correlación

$$\frac{1}{\beta} = \frac{c_{11} + 2c_{12}}{3}.$$

7.21. Demostrar que para los cristales de la simetría $4/mmm$ se cumple la correlación $c_{11} - c_{12} = 1/(s_{11} - s_{12})$.

7.22. Demostrar que para los cristales cúbicos la constante de la rigidez elástica c_{11} está enlazada con las constantes de la compresibilidad elástica s_{11} y s_{12} por la correlación

$$c_{11} = \frac{s_{11} + s_{12}}{(s_{11} - s_{12})(s_{11} + 2s_{12})}.$$

7.23. ¿Cuáles son los coeficientes de compresibilidad elástica que se puede definir, midiendo la magnitud de la compresión volumétrica $\Delta V/V$ y, también, de la deformación longitudinal de la probeta de wurtzita que experimenta la tensión de compresión en la dirección [0001]?

7.24. La tensión de compresión de $1{,}5 \cdot 10^2$ kgf/cm² está aplicada a la probeta monocristalina de silicio en la dirección [100]; el valor de la deformación relativa longitudinal es de $1{,}13 \cdot 10^{-4}$. Luego, la probeta ha sido sometida a la acción de la presión hidrostática de 10^3 kgf/cm²; la disminu-

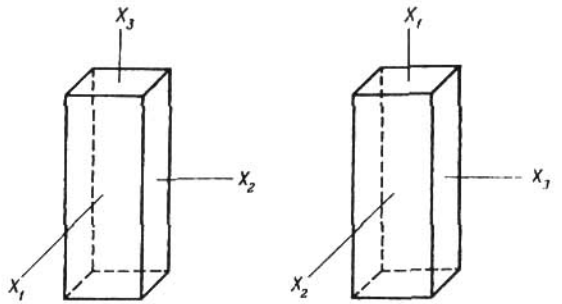


Fig. 7.3.

ción relativa del volumen de la probeta en este caso es de $1{,}1 \cdot 10^{-3}$. ¿Qué coeficientes s_{ij} podemos hallar según los resultados del experimento? ¿Qué valores tendrán?

7.25. Con el fin de obtener las características de elasticidad de la cerámica polarizada de titanato de bario, de ésta han hecho dos probetas en forma de paralelepípedos alargados de sección cuadrada (fig. 7.3). El eje de la cerámica polarizada en los dos casos ha sido el eje X_3, y la tensión uniaxial de compresión ha actuado por la normal a la sección cuadrada de las probetas. ¿Qué coeficientes, que caractericen las propiedades elásticas de la cerámica, se puede obtener según los resultados de la medición de la deformación longitudinal y de la compresión volumétrica de las probetas?

7.26. ¿Qué coeficientes elásticos del cuarzo podemos determinar, cargando por la longitud la barra cortada de modo indicado en la fig. 7.3, a la izquierda, y midiendo las deformaciones de sus aristas?

7.27. Las mediciones de los coeficientes, necesarios para caracterizar las propiedades elásticas del cristal cúbico, se han efectuado, midiendo las frecuencias resonantes de las tres probetas de diferente orientación, representadas en la fig. 7.2.

Los datos mediados de las mediciones están agrupados en una tabla.

¿Qué coeficientes pueden ser obtenidos por los resultados de las mediciones, y qué valor tendrán?

Orientación de la sección	Dimensiones, en mm			Tipo de oscilaciones	Frecuencia resonante, kHz
	l	t	d		
sección Z de 22,5°	20,1	2,69	1	Oscilaciones longitudinales en frecuencia fundamental	95,976
sección Z de 45°	20,38	2,7	1,01	Idem	89,205
sección Z de 0°	29,9	6,02	1,01	Oscilaciones de deslizamiento en frecuenoia fundamental	180,398

7.28. Calcular los valores de los coeficientes isotérmicos de compresibilidad elástica del cuarzo, aceptando para los coeficientes adiabáticos s_{ij} los valores indicados en la tabla 12.

§ 8. PROPIEDADES PIEZOÓPTICAS DE LOS CRISTALES

El efecto piezoóptico consiste en el cambio de las propiedades refringentes de los cristales bajo la acción de las tensiones mecánicas exteriores estáticas o variables.

El cambio de los índices de refracción es conveniente describirlo, utilizando la indicatriz óptica. La ecuación de la indicatriz óptica de cualquier cristal en el sistema de sus ejes principales X_1, X_2, X_3 tiene la forma

$$\frac{x_1}{n_1^2} + \frac{x_2}{n_2^2} + \frac{x_3}{n_3^2} = 1 \qquad (8.1)$$

y puede escribirse en otra forma:

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 1, \qquad (8.2)$$

donde a_1, a_2, a_3 son las impermeabilidades dieléctricas principales del cristal en ausencia del campo. El tensor $[a_{ij}]$ es inverso con respecto al tensor de las permeabilidades dieléctricas $[\varepsilon_{ij}]$ y se llama el tensor de las constantes de polariza-

ción. Al comparar (8.1) y (8.2), resulta que

$$a_1 = \frac{1}{n_1^2}, \quad a_2 = \frac{1}{n_2^2}, \quad a_3 = \frac{1}{n_3^2}. \tag{8.3}$$

Al superponer el campo de las tensiones mecánicas, cambia la forma y la orientación de la indicatriz óptica y, en el caso general, sus nuevos ejes principales no coinciden con los ejes principales iniciales. En el nuevo sistema arbitrario de coordenadas $X_1'X_2'X_3'$ que tiene el mismo origen de coordenadas que el sistema principal (cristalofísico) de coordenadas $X_1X_2X_3$ la ecuación de la indicatriz óptica se puede escribir así:

$$a'_{11}x_1'^2 + a_{22}x_2'^2 + a_{33}x_3'^2 + 2a'_{23}x_2x_3 + \\ + 2a'_{13}x_1x_3' + 2a'_{12}x_1'x_2' = 1. \tag{8.4}$$

Las constantes de polarización a'_{ij} referidas al sistema de coordenadas $X_1'X_2'X_3'$ están enlazadas con las constantes de polarización a_{ii} en el sistema principal de coordenadas por medio de la correlación:

$$a'_{jk} = c_{ji}c_{ki}a_{ii},$$

donde c_{ji} y c_{ki} son los cosenos directores de los ángulos entre los ejes de los sistemas de coordenadas arbitrario y principal. Los cambios de las constantes de polarización Δa_{ij} debidos a la aplicación de las tensiones mecánicas (deformaciones)* son iguales a:

$$\Delta a_{ij} = a'_{ij} - a_{ij}. \tag{8.5}$$

Los cambios de las constantes de polarización en este caso (con la exactitud hasta los términos de primer orden) resultan ser proporcionales a las tensiones mecánicas (deformaciones):

$$\Delta a_{ij} = \pi_{ijkl}t_{kl}, \tag{8.6}$$

$$\Delta a_{ij} = P_{ijkl}r_{kl}. \tag{8.7}$$

Los coeficientes π_{ijkl} y P_{ijkl} forman el tensor de cuarto rango y se llaman, respectivamente, constantes piezoópticas y elastoópticas. Debido a que $\Delta a_{ij} = \Delta a_{ji}$; $t_{kl} = t_{lk}$ (en ausencia de los momentos volumétricos)

$$\pi_{ijkl} = \pi_{jikl},$$

$$\pi_{ijkl} = \pi_{ijlk}.$$

* El efecto del cambio de la indicatriz óptica del cristal debido al surgimiento de las deformaciones se llama elastoóptico.

Expresión matricial. En la forma matricial, las ecuaciones (8.6) y (8.7) se pueden escribir así:

$$\Delta a_m = \pi_{mn} t_n, \tag{8.8}$$

donde $\pi_{mn} = \pi_{ijkl}$, cuando $n = 1, 2, 3$,

$\pi_{mn} = 2\pi_{ijkl}$, cuando $n = 4, 5, 6$,

$$\Delta a_m = P_{mn} r_n, \tag{8.9}$$

donde P_{mn} son los coeficientes elastoópticos adimensionales, con la particularidad de que $P_{mn} = P_{ijkl}$ para todas las m y n. En el caso general, $\pi_{mn} \neq \pi_{nm}$, $P_{mn} \neq P_{nm}$.

Los coeficientes π_{mn} y P_{mn} están enlazados por medio de las siguientes correlaciones:

$$P_{mn} = \pi_{mr} C_{rn}; \quad \pi_{mn} = P_{mr} S_{rn}, \tag{8.10}$$

donde C_{rn} son coeficientes de la rigidez elástica, S_{rn} son coeficientes de la compresibilidad elástica.

Las formas de las matrices (π_{ij}) y (P_{ij}) para los cristales de diferentes clases cristalográficas se dan en la tabla 10.

Para la solución de problemas es cómodo escribir las ecuaciones (8.8) y (8.9) en las formas de una tabla del tipo siguiente:

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
Δa_1	π_{11}	π_{12}	π_{13}	π_{14}	π_{15}	π_{16}
Δa_2	π_{21}	π_{22}	π_{23}	π_{24}	π_{25}	π_{26}
Δa_3	π_{31}	π_{32}	π_{33}	π_{34}	π_{35}	π_{36}
Δa_4	π_{41}	π_{42}	π_{43}	π_{44}	π_{45}	π_{46}
Δa_5	π_{51}	π_{52}	π_{53}	π_{54}	π_{55}	π_{56}
Δa_6	π_{61}	π_{62}	π_{63}	π_{64}	π_{65}	π_{66}

Efecto piezoóptico longitudinal y transversal. Para la aplicación práctica son de mayor importancia los efectos longitudinal y transersal. El efecto piezoóptico longitudinal es el efecto de la birrefringencia artificial observado en la misma dirección en que está aplicada la tensión mecánica uniaxial (la tensión mecánica y la luz están dirigidas en el mismo eje), (*fig.* 8.1, *a*).

El efecto piezoóptico transversal es el efecto observado en la dirección perpendicular a la dirección en que actúa la tensión mecánica uniaxial (fig. 8.1, *b*).

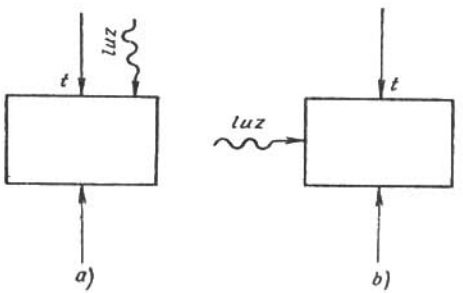


Fig. 8.1. Representación esquemática del efecto piezoóptico longit - dinal (*a*) y transversal (*b*).

Ejemplos de solución de los problemas

8.1. Una tensión mecánica actúa en la probeta cúbica de la sal de roca de $1 \times 1 \times 1$ cm^3 partida por los planos de crucero (100) en la dirección del eje de cuarto orden. Determinar la magnitud de esta tensión, si la diferencia del recorrido del rayo ordinario y del extraordinario, con la longitud de onda de 5890 Å medida en la dirección [100], es de $10{,}2 \cdot 10^{-5}$ cm. El índice de refracción para $\lambda = 5890$ Å, considerarlo igual a 1,51.

Solución. La simetría de la sal de roca es $m3m$ (véase la tabla 12), por lo tanto, en ausencia de las tensiones mecánicas la indicatriz óptica de este cubo representa una esfera

$$a_0 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 1,$$

donde a_0 es la constante de polarización enlazada con el índice de refracción mediante la correlación $a_0 = 1/n_0^2$.

Puesto que la extensión uniaxial del cubo se efectúa por la dirección [100], el tensor de las tensiones mecánicas tiene una componente única

$$t_1 = t.$$

Las variaciones correspondientes de las constantes de polarización son:

$$\Delta a_1 = \pi_{11} t,$$

$$\Delta a_2 = \Delta a_3 = \pi_{12} t,$$

$$\Delta a_4 = \Delta a_5 = \Delta a_6 = 0.$$

La ecuación de la indicatriz óptica cambiada toma la forma

$$(a_0 + \Delta a_1) x_1^2 + (a_0 + \Delta a_2) x_2^2 + (a_0 + \Delta a_2) x_3^2 = 1,$$

o

$$a_1 x_1^2 + a_2 (x_2^2 + x_3^2) = 1.$$

Siendo $a_4 = a_5 = a_6 = 0$, los ejes de esta indicatriz óptica coinciden con los ejes cristalofísicos X_1, X_2, y X_3, es decir, durante la extensión en la dirección [100] los ejes de la indicatriz óptica de la sal de roca sólo se deforman, pero no cambian su posición.

Hallemos los valores de los tres índices principales de refracción:

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{a_1}} = \frac{1}{\sqrt{a_0 + \Delta a_1}} = \frac{1}{\sqrt{a_0}} \frac{1}{\sqrt{1 + \Delta a_1 / a_0}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a_0}} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta a_1}{a_0}\right) = \frac{1}{\sqrt{a_0}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta a_1}{a_0 \sqrt{a_0}} =$$

$$= n_0 - \frac{1}{2} n_0^3 \Delta a_1 = n_0 - \frac{1}{2} n_0^3 \pi_{11} t.$$

Analógicamente

$$n_2 = n_3 = n_0 - \frac{1}{2} n_0^3 \pi_{12} t.$$

De este modo, la indicatriz óptica de la sal de roca llega a ser elipsoide de revolución durante la extensión del cristal a lo largo de [100], y el cubo de la sal de roca se comporta como un cristal uniaxial.

Este mismo resultado se puede obtener también del principio de Curie. En efecto, la superposición de las tensiones mecánicas de simetría ∞/mmm al cristal de simetría $m3m$ a lo largo de la dirección [100] que coincide con el eje de simetría 4 reduce la simetría del cristal hasta la clase tetragonal de simetría $4/mmm$, es decir, hace el cristal ópticamente uniaxial.

La magnitud de la birrefringencia para los rayos luminosos que se propagan a lo largo de la dirección [010] se expresa por la correlación

$$\Delta n = n_1 - n_3 = -\frac{1}{2} n_0^3 (\pi_{11} - \pi_{12}) t.$$

De aquí

$$t = \frac{\Delta n d}{\frac{1}{2} n_0^3 (\pi_{12} - \pi_{11}) d} = \frac{10{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 1}{\frac{1}{2} (1{,}51)^3 \cdot 1{,}21 \cdot 10^{-11} \cdot 1} = 5 \text{ kgf/cm}^2.$$

8.2. El modulador fotoelástico de germanio de birrefringencia empleado para modular las emisiones de la gama infrarroja está orientado de modo que la tensión mecánica uniaxial actúa en la dirección [111]. Hallar la magnitud de la birrefringencia artificial máxima inducida por la aplicación de la tensión mecánica en la dirección [111]. ¿En qué régimen, en el del efecto longitudinal o transversal, debe trabajar este modulador?

Solución. Los cristales de germanio pertenecen a la clase $m3m$. La ecuación de la indicatriz óptica del cristal no tenso tiene la forma: $a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 1$. Durante la acción de la tensión mecánica uniaxial en la dirección [111] que en el sistema de coordenadas cristalofísico se da con el tensor de tipo:

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} t & t & t \\ t & t & t \\ t & t & t \end{bmatrix}.$$

Los cambios de las constantes de polarización según (8.8) son iguales a:

$$\Delta a_1 = \Delta a_2 = \Delta a_3 = \frac{1}{3}(\pi_{11} + 2\pi_{12})\, t,$$

$$\Delta a_4 = \Delta a_5 = \Delta a_6 = \frac{1}{3}\pi_{44} t.$$

La ecuación de la indicatriz óptica en el sistema inicial de coordenadas toma la forma:

$$\left[a + \frac{1}{3}(\pi_{11} + 2\pi_{12})\, t\right](x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \\ + \frac{1}{3}\pi_{44}(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 1$$

y el tensor de las constantes de polarización tiene en este caso la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} c & b & b \\ b & c & b \\ b & b & c \end{bmatrix},$$

donde $c = a + \frac{t}{3}(\pi_{11} + 2\pi_{12})$; $b = \frac{1}{3}\pi_{44} t$. Hallando los valores principales del tensor $[a_{ij}]$, resulta que $\lambda_1 = \lambda_2 = c - b$, $\lambda_3 = c + 2b$, y las direcciones X_1', X_2', X_3', correspon-

dientes a los valores principales del tensor $[a_{ij}]$ se determinan por los vectores $\frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, -1); \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1); \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.

Por consiguiente, la dirección del eje X_3' coincide con la dirección de la acción de la tensión mecánica.

Para hallar los valores de los índices de refracción del cristal tensado es necesario reducir las ecuaciones de su indicatriz óptica a los ejes principales.

La ecuación de la indicatriz óptica en el sistema de sus ejes principales $X_1'X_2'X_3'$ toma la forma:

$$\left[a + \frac{1}{3}(\pi_{11} + 2\pi_{12} - \pi_{44})\,t\right](x_1'^2 + x_2'^2) + \left[a + \frac{1}{3}(\pi_{11} + 2\pi_{12} + 2\pi_{44})\,t\right]x_3'^2 = 1.$$

Los coeficientes de refracción en la dirección de los ejes principales X_1', X_2', X_3', respectivamente, son iguales a:

$$n_{x_1'} = n_{x_2'} = n_0 - \frac{n_0^3 t}{6}(\pi_{11} + 2\pi_{12} + 2\pi_{44}),$$

$$n_{x_3'} = n_0 - \frac{n_0^3 t}{6}(\pi_{11} + 2\pi_{12} - \pi_{44}).$$

La magnitud de la birrefringencia máxima inducida por la aplicación de la tensión mecánica uniaxial que actúa en la dirección de [111] es igual a:

$$B_{[111]} = n_{x_1'} - n_{x_3'} = -\frac{n_0^3 \pi_{44} t}{2}.$$

Es evidente que en el régimen del efecto longitudinal, cuando la tensión mecánica y la luz están dirigidas por la [111], este modulador no trabajará, puesto que $n_{x_1'} = n_{x_2'}$ y la magnitud de la birrefringencia artificial en este caso es igual a cero. El modulador funcionará sólo en el régimen del efecto transversal.

8.3. Para crear los deflectores, dispositivos de mando de la dirección en que se propaga la luz, se puede emplear el efecto del cambio del ángulo de la reflexión interna total observado en los cristales cuando éstos se encuentran bajo la acción de la tensión mecánica (del campo eléctrico) que actúa perpendicularmente al plano de incidencia.

En la fig. 8.2 está representada la orientación del prisma con el ángulo dirigido de la reflexión interna total.

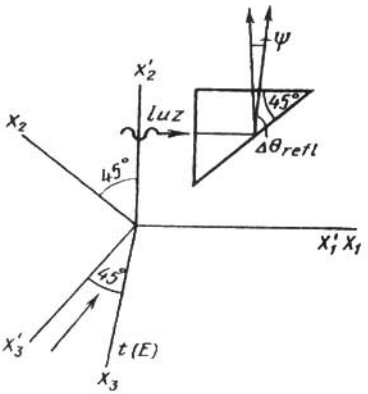


Fig. 8.2. Dibujo para el problema 8.3.

En este caso el rayo luminoso linealmente polarizado, la dirección de las oscilaciones del cual está en el plano de la incidencia de la luz, se desvía de la dirección del rayo no perturbado, debido al efecto piezoóptico (electroóptico), en el ángulo ψ que es igual a

$$1/2n_0^3(\Delta a'_{11} - \Delta a'_{22}),$$

donde $\Delta a'_{11}$ y $\Delta a'_{22}$ son los cambios de las constantes de polarización condicionados por la acción de la tensión mecánica (del campo eléctrico). Calcular el valor de ψ que se puede obtener con ayuda del prisma de desviación de NaCl para la señal luminosa con $\lambda = 0{,}589\ \mu$ durante la acción de la tensión mecánica de 103 kgf/cm².

Solución. Como se ve de la fig. 8.2, la luz incidente está dirigida a lo largo del eje X_1'; la luz reflejada, a lo largo del eje X_2' y la tensión mecánica uniaxial, a lo largo del eje X_3'.

La orientación del sistema de coordenadas de $X_1'X_2'X_3'$ respecto de los ejes cristalofísicos $X_1X_2X_3$ se describe con la siguiente matriz de los cosenos directores:

	X_1	X_2	X_3
X_1'	1	0	0
X_2'	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
X_3'	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

Según (8.6),

$$\Delta a'_{ij} = \pi'_{ijkl} t'_{kl}.$$

Puesto que la tensión mecánica uniaxial actúa a lo largo del eje X_3', la única componente del tensor $[t_{ij}]$, diferente de cero, es la componente t'_{33}.

Por consiguiente,

$$\Delta a'_{11} = \pi'_{1133} t'_{33}; \quad \Delta a'_{22} = \pi'_{2233} t'_{33},$$

donde

$$\pi'_{1133} = C_{1i} C_{1j} C_{3k} C_{3l} \pi_{ijkl}; \quad \pi_{2233} = C_{2i} C_{2j} C_{3k} C_{3l} \pi_{ijkl};$$

en este caso π_{ijkl} son los coeficientes piezoópticos en el sistema de coordenadas cristalofísico, C son los elementos de la matriz antedicha de los cosenos. Teniendo en cuenta los coeficientes π_{ijkl}, diferentes de cero, para la clase con la simetría $m3m$ a que pertenecen los cristales de NaCl, obtenemos:

$$\pi'_{1133} = \frac{1}{2}(\pi_{1122} + \pi_{1133}) = \pi_{12},$$

$$\pi'_{2233} = \frac{1}{4}(\pi_{2222} + \pi_{2233} + \pi_{3333} - 4\pi_{2323}) = \frac{1}{4}(2\pi_{11} + 2\pi_{12} - 2\pi_{44}).$$

Considerando que $t'_{33} = t$, obtenemos:

$$\Delta a'_{11} = \pi_{12} t,$$

$$\Delta a'_{22} = \frac{1}{2}(\pi_{11} + \pi_{12} - \pi_{44})\, t, \text{ de donde } \psi = \frac{1}{2} n_0^3 (\Delta a'_{11} - \Delta a'_{22}) =$$

$$= -\frac{1}{4} n_0^3 (\pi_{11} - \pi_{12} - \pi_{44})\, t; \quad \psi = 2,1'.$$

8.4. Para estudiar las propiedades piezoópticas de los cristales de RDP (RbH_2PO_4), pertenecientes a la clase $\bar{4}2m$, se ha utilizado una lámina cristalina de la sección Z de 45° (véase la fig. 6.3), alargada en la dirección [110].

La lámina se ha sometido a la acción de una tensión de extensión en la dirección [110] y, al mismo tiempo, a la acción de compresión en la dirección [1$\bar{1}$0]. Durante la propagación de la luz con la longitud de la onda de 5350 Å en la dirección [001], la diferencia de recorridos, igual a $\lambda/2$, ha sido lograda con la tensión de 0,776 kgf/cm². ¿Cuál de los coeficientes piezoópticos podemos determinar, valiéndonos de los resultados del experimento? Calcular la magnitud de este coeficiente, si el espesor de la lámina es de 10 mm y $n_0 = 1{,}509$ para $\lambda = 5350$ Å.

Solución. En el sistema de los ejes enlazados con las aristas de la sección Z de 45°, el estado tenso de la lámina cristalina se escribirá en la forma

$$\begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En el sistema de coordenadas cristalofísico el estado tenso dado, como es evidente, lo describirá el tensor

$$\begin{bmatrix} 0 & t & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

que contiene sólo las componentes de deslizamiento designadas en la expresión matricial como t_6.

La ecuación de la indicatriz óptica en ausencia de la tensión mecánica del cristal tiene la forma

$$a_1^0 (x_1^2 + x_2^2) + a_3^2 x_3^2 = 1,$$

donde

$$a_1^0 = 1/n_o^2, \quad a_3^0 = 1/n_e^2.$$

El cambio de las constantes de polarización debido a la acción de la tensión mecánica t_6, conforme a (8.8), es igual a $\Delta a_6 = \pi_{66} t$, y la ecuación de la indicatriz óptica en este caso se escribe en la forma

$$a_1^0 (x_1^2 + x_2^2) + a_3^0 x_3^2 + 2\pi_{66} t x_1 x_2 = 1.$$

Puesto que la luz se propaga en la dirección de [001], el cambio de las propiedades refringentes se determina en este caso por medio de la sección de la indicatriz óptica que es perpendicular a la dirección de la propagación de la luz, la ecuación de la cual

$$a_1^0 (x_1^2 + x_2^2) + 2\pi_{66} t x_1 x_2 = 1,$$

escrita en sus ejes principales, tiene la forma

$$(a_1^0 + \pi_{66} t) x_1'^2 + (a_1^0 - \pi_{66} t) x_2'^2 = 1.$$

De aquí podemos hallar fácilmente los valores de los nuevos coeficientes de refracción de RDP:

$$n_1' = n_0 + \frac{1}{2} n_0^3 \pi_{66} t,$$

$$n_2' = n_0 - \frac{1}{2} n_0^3 \pi_{66} t.$$

La magnitud de la birrefringencia inducida se halla como la diferencia de los nuevos coeficientes de refracción $\Delta n = n' - n_2' = n_0^3 \pi_{66} t$. La diferencia de recorridos de $\lambda/2$ se ha logrado, siendo $t = 0{,}776$ kgf/cm², es decir, $\lambda/2 = n_0^3 \pi_{66} t_{\frac{\lambda}{2}} d$.

Por lo tanto, valiéndonos de los datos del experimento, podemos determinar el coeficiente piezoóptico π_{66}. Calculemos su magnitud:

$$\pi_{66} = \frac{\lambda}{2n_0^3 t_{\lambda/2} d} = \frac{5350 \cdot 10^{-8}}{2\,(1{,}5090)^3 \cdot 7{,}6 \cdot 9{,}8 \cdot 10^5} = 10{,}5 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^2/\text{din}.$$

8.5. La tensión mecánica uniaxial actúa en la probeta cristalina de ADP en la dirección de [100]. Hallar las expresiones que permitan apreciar la magnitud de los coeficientes de refracción del cristal en estado de tensión.

Solución. La indicatriz óptica del cristal no tenso representa en sí un elipsoide de revolución cuya ecuación tiene la forma:

$$a_1 (x_1^2 + x_2^2) + a_3 x_3^2 = 1, \text{ donde } a_1 = \frac{1}{n_o^2},$$

$$a_3 = \frac{1}{n_e^2}.$$

La tensión mecánica uniaxial actúa en el cristal en la dirección de [100] que es el eje X_1 del sistema de coordenadas cristalofísico, por eso, el tensor de las tensiones mecánicas tiene sólo una componente única t_1 diferente de cero. Según (8.8) y en correspondencia con la forma de la matriz (π_{ij}) para los cristales con la simetría $\bar{4}2m$ los cambios de las constantes de polarización en este caso son: $\Delta a_1 = \pi_{11} t$, $\Delta a_2 = \pi_{12} t$, $\Delta a_3 = \pi_{13} t$, y la ecuación de la indicatriz óptica toma la forma:

$$(a_1 + \pi_{11} t_1) x_1^2 + (a_1 + \pi_{12} t_1) x_1^2 + (a_3 + \pi_{13} t_1) x_3^2 = 1.$$

De esta ecuación podemos deducir que la tensión mecánica uniaxial que actúa en la dirección de [100], origina sólo la deformación de la indicatriz óptica en la dirección de los ejes principales.

Puesto que el giro no tiene lugar, los valores de los nuevos índices principales se puede determinar directamente de la última ecuación

$$n_1' = n_0 - 1/2 \pi_{11} t_1 n_0^3,$$

$$n_2' = n_0 - 1/2 \pi_{12} t_1 n_0^3,$$

$$n_3' = n_0 - 1/2 \pi_{13} t_1 n_0^3.$$

Problemas

8.6. Partiendo sólo de las consideraciones de simetría, demostrar que para los cristales pertenecientes a las clases 23 y $m3$ el coeficiente piezoóptico π_{12} no es igual a π_{13}.

8.7. Un cristal de esfalerita está comprimido en la dirección de [110]. ¿Como se ha cambiado su indicatriz óptica? ¿Si está enlazada la dirección de tracción con la dirección de los ejes de la indicatriz óptica del cristal?

9.8. ¿Si se observará el efecto piezoóptico longitudinal en el cubo de la sal de roca partido por los planos de crucero bajo la acción de la tensión mecánica a lo largo de las direcciones del tipo [100]? ¿Si se observará o no el efecto transversal?

8.9. Enumerar las clases de simetría de los cristales cuyas indicatrices ópticas no sólo experimentan las deformaciones de sus ejes, sino también giran cierto ángulo bajo la acción de las presiones hidrostáticas.

8.10. En la lámina de fluorita de 1 cm de espesor cortada perpendicularmente a la dirección de [111], se observó el efecto piezoóptico transversal. La diferencia de recorridos de $\lambda/2$ para la luz monocromática de la longitud de onda de 5900 Å fue lograda al comprimir la lámina con la tensión de 3,2 kgf/cm^2. Hallar el coeficiente piezoóptico que puede ser calculado según los datos del experimento.

8.11. Determinar la magnitud de la birrefringencia de los cristales de alumbre potásico en las direcciones de [010] y [001], inducida por la aplicación de una tensión mecánica uniaxial en la dirección de [100].

8.12. La tensión mecánica uniaxial t actúa en la probeta cristalina de ADP en la dirección de [100]. Hallar las expresiones que permitan apreciar la magnitud de los coeficientes de refracción del cristal en estado tenso.

8.13. Un cubo de la sal de roca partido por los planos de crucero está comprimido con una tensión t a lo largo de la dirección de [100]. Determinar la magnitud de la birrefringencia de este cubo en la dirección perpendicular a la dirección de compresión y el signo óptico del cristal en estado tenso.

8.14. ¿Qué tensión mecánica de tracción hay que aplicar a la lámina de la sección Z de 45° de ADP de 5 mm de grosor en la dirección de [110], aplicando simultáneamente una tensión de compresión de igual magnitud en la dirección de

[110] para que durante la propagación de la luz monocromática con la longitud de onda de 0,534 μ en la dirección de [001] semejante lámina nos dé la diferencia de recorridos de λ/4? Aceptar para λ = 0,535 μ el valor de n_0 igual a 1,525.

8.15. ¿Si se observará o no el efecto piezoóptico longitudinal en la lámina de la sección Z de KDP (fig. 1.8)? ¿Y el efecto piezoóptico transversal?

8.16. El modulador fotoelástico empleado en los sistemas de banda estrecha (por ejemplo, en los telémetros luminosos) que trabaja en el *régimen del efecto transversal* consiste en una lámina de granate ferro-ítrico de 3 mm de grosor, la normal a la cual coincide con la dirección de [111]. Calcular la magnitud de la tensión mecánica de mando que es necesaria para crear la diferencia de recorridos de media onda para la señal luminosa con λ = 1,15 μ.

8.17. Al estudiar las propiedades piezoópticas de los *cristales de cuarzo, un cubo cristalino de cuarzo con las* aristas paralelas a los ejes cristalofísicos fue comprimido en la dirección del eje X_1. ¿Qué coeficientes piezoópticos del cuarzo se puede recibir por los resultados del experimento en el proceso del cual se midió el cambio de los índices de refracción en dirección de las aristas de este cubo?

8.18. El modulador fotoelástico que representa en sí una *lámina de corindón monocristalina de la sección Z (fig. 2.3)*, de dimensiones de 1 × 1 × 0,3 cm³, trabaja en el régimen del efecto transversal. ¿Qué deformaciones de grosor hay que excitar en esta lámina para obtener, durante la propagación de la señal luminosa con λ = 0,63 μ en la dirección del eje X_1, la diferencia de recorridos igual a λ/2?

Indicación. Aceptar el valor del coeficiente de P_{13} igual a 0,08.

8.19. ¿Qué deformaciones de grosor hay que crear en una lámina cuadrada de la sección X de niobato de litio de dimensiones de 1 × 1 × 0,3 cm³ para que ésta nos dé, durante el paso de la luz en la dirección de [0001], la diferencia de recorridos igual a λ/2 para la luz con la longitud de onda de 0,63 μ?

8.20. *¿De qué magnitud debe ser la tensión de deslizamiento* t_{12} para que se obtenga, durante la propagación de la luz con λ = 0,535 μ en la dirección de [001], la diferencia de recorridos de λ/2 en las probetas de dimensiones unitarias de ADP y de DKDP?

§ 9. PROPIEDADES ELECTROÓPTICAS DE LOS CRISTALES. EFECTO ELECTROÓPTICO LINEAL Y CUADRÁTICO

Efecto electroóptico lineal. El efecto electroóptico (efecto Poekels) consiste en el cambio de las propiedades refringentes de los cristales bajo la acción del campo eléctrico exterior continuo o alternativo, suponiéndose que la frecuencia del campo eléctrico alternativo es mucho menor de las frecuencias ópticas.

Una propiedad importante del efecto electroóptico lineal es su pequeña capacidad de inercia que permite realizar la modulación de la luz hasta las frecuencias de decenas de gigahertzios. Además, debido a la dependencia lineal entre el índice de refracción y el campo eléctrico las distorsiones no lineales durante la modulación son relativamente pequeñas. Con la descripción analítica del efecto electroóptico se examina el enlace entre el cambio de las constantes de polarización y el campo eléctrico;

$$\Delta a_{ij} = r_{ijk} E_k, \tag{9.1}$$

donde r_{ijk} son los coeficientes que forman el tensor polar de tercer rango llamado el tensor del efecto lineal electroóptico. Cuando examinamos el efecto electroóptico espontáneo en los ferroeléctricos, la ecuación (9.1) se escribe en la forma siguiente:

$$\Delta a_{ij} = m_{ijk} P_k. \tag{9.2}$$

Las propiedades electroópticas de los ferroeléctricos dependen sustancialmente de si está cortocircuitado eléctricamente ($E = \text{const}$) o si está desconectado ($D = \text{const}$) el cristal en el proceso de las mediciones. De las ecuaciones (9.1) y (9.2) vemos que los coeficientes r_{ijk} se determinan en las condiciones de la intensidad constante del campo eléctrico y el coeficiente m_{ijk}, en las condiciones de la constancia de la inducción eléctrica.

Designaciones matriciales. Gracias a la simetría del tensor de las constantes de polarización, la ecuación (9.1) se puede escribir en la forma matricial:

$$\Delta a_i = r_{ij} E_j \quad (i = 1, 2 \ldots, 6;\ j = 1, 2, 3). \tag{9.3}$$

$$\Delta a_i = m_{ij} P_j. \tag{9.4}$$

Al sustituir r_{ijk} (m_{ijk}) por r_{ij} (m_{ij}), los factores 2 y 1/2 no aparecen.

Para la solución de los problemas la ecuación (9.3) es más cómodo escribirla en forma de una tabla:

	E_1	E_2	E_3
Δa_1	r_{11}	r_{12}	r_{13}
Δa_2	r_{21}	r_{22}	r_{23}
Δa_3	r_{31}	r_{32}	r_{33}
Δa_4	r_{41}	r_{42}	r_{43}
Δa_5	r_{51}	r_{52}	r_{53}
Δa_6	r_{61}	r_{62}	r_{63}

Exigencias que impone la simetría. En el caso general hay 18 coeficientes independientes de r_{ij}. Gracias a la simetría del cristal este número disminuye igual que en el caso de los módulos piezoeléctricos. Las formas de las matrices de (r_{ij}) coinciden con las formas de las matrices piezoeléctricas transpuestas (d_{ij}) con la exactitud de hasta los factores constantes y se dan en la tabla 11. El efecto electroóptico lineal, igual que cualquier efecto que se describe con el tensor polar de tercer rango, es imposible en los cristales centrosimétricos.

Efecto electroóptico primario y secundario. El efecto electroóptico lineal es posible sólo en los cristales no centrosimétricos, es decir, en los mismos cristales en que se observa el efecto piezoeléctrico. Por eso, si el cristal está mecánicamente libre (las tensiones son iguales a cero), en este caso, a consecuencia del efecto piezoeléctrico inverso el campo eléctrico originará las deformaciones que, a su vez, según la ecuación (8.9), conducirán al cambio de los índices de refracción como resultado del efecto elastoóptico. De este modo, en los campos eléctricos estáticos o de baja frecuencia, cuando el cristal puede deformarse libremente, se observa un efecto sumario. El cambio de las constantes de polarización originado por la superposición del campo eléctrico y no enlazado con el efecto piezoeléctrico inverso (por medio del efecto elastoóptico) se llama el efecto electroóptico primario («verdadero»). En otras palabras, el efecto electroóptico lineal «verdadero» es el resultado solamente de la influencia directa del campo eléctrico en el dieléctrico.

Es evidente que el efecto electroóptcio primario («verdadero») se observa en los cristales con la deformación prohibida, es decir, en los cristales mecánicamente «apretados». La condición de la compresión mecánica del cristal se cumple durante la observación del efecto electroóptico en el campo eléctrico de alta frecuencia, en que ésta sobrepasa mucho la frecuencia de las oscilaciones propias del cristal.

El efecto electroóptico lineal secundario o «falso» se llama el cambio de las constantes de polarización condicionado por el efecto piezoeléctrico inverso (por medio del efecto elastoóptico). El enlace entre los dos efectos se describe con la ecuación siguiente:

$$\Delta a_{ij} = r_{ijk} E_k = r^*_{ijk} E_k + P_{ijlm} r_{lm} = \\ = (r^*_{ijk} + P_{ijlm} d_{klm}) E_k, \quad (9.5)$$

de ahí

$$r_{ijk} = r^*_{ijk} + P_{ijlm} d_{klm}, \quad (9.6)$$

donde r^*_{ijk} es el coeficiente del efecto electroóptico primario («verdadero»); P_{ijlm} son los coeficientes elastoópticos; d_{klm} son los módulos piezoeléctricos.

Analógicamente,

$$\Delta a_{ij} = (m^*_{ijk} + P_{ijlm} g_{klm}) P_k, \quad (9.7)$$

$$m_{ijk} = m^*_{ijk} + P_{ijlm} g_{klm}, \quad (9.8)$$

donde m^*_{ijk} son los coeficientes del efecto electroóptico primario («verdadero»), g_{klm} son las constantes piezoeléctricas.

Efecto electroóptico cuadrático (efecto Kerr). La aplicación del campo eléctrico $\overline{E}$ puede originar en los cristales los efectos tanto lineales (proporcionales a $\overline{E}$) como cuadráticos (proporcionales a $\overline{E}^2$).

Los cambios de las constantes de polarización debidos a la aplicación del campo al medio electroóptico con la exactitud de hasta los términos de segundo orden de los infinitésimos se pueden encontrar de la correlación:

$$\Delta a_{ij} = r_{ijk} E_k + R_{ijkl} E_k E_l. \quad (9.9)$$

Aquí los términos $r_{ijk} E_k$ caracterizan el efecto electroóptico lineal y los términos $R_{ijkl} E_k E_l$, el efecto cuadrático. De este modo, los cambios de las constantes de polarización debidos al efecto electroóptico cuadrático se pueden hallar

de la ecuación:

$$\Delta a_{ij} = R_{ijkl} E_k E_l. \tag{9.10}$$

Los cambios de las constantes de polarización originados por el surgimiento (o variación) de la polarización espontánea $\bar{P}^s$ en los ferroeléctricos a costa del efecto electroóptico cuadrático se hallan de la ecuación:

$$\Delta a_{ij} = M_{ijkl} P_k^s P_l^s. \tag{9.11}$$

Los coeficientes del efecto electroóptico cuadrático R_{ijkl}, M_{ijkl} son las componentes del tensor de cuarto rango e igual que los coeficientes de electrostricción, son simétricos tanto por pares de índices i y j, como por pares de índices l y k, es decir,

$$R_{ijkl} = R_{jilk}, \tag{9.12}$$

pero no son permutables por pares de índices:

$$R_{ijkl} \neq R_{klij}. \tag{9.13}$$

Al introducir las designaciones siguientes

$$\begin{gathered} E_1E_1 = E_1^2; \quad E_2E_2 = E_2^2; \quad E_3E_3 = E_3^2; \\ E_2E_3, \quad E_3E_2 = E_4^2; \quad E_3E_1, \quad E_1E_3 = E_5^2; \\ E_1E_2, \quad E_2E_1 = E_6^2, \end{gathered} \tag{9.14}$$

las ecuaciones (9.10) y (9.11) se puede escribir en la forma matricial

$$\Delta a_i = R_{ij} E_j^2, \tag{9.15}$$

$$\Delta a_i = M_{ij} P_j^2. \tag{9.16}$$

Para realizar los cálculos concretos es más cómodo escribir las ecuaciones (9.15) en la forma más desplegada:

	E_1^2	E_2^2	E_3^2	E_4^2	E_5^2	E_6^2
Δa_1	R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}	R_{15}	R_{16}
Δa_2	R_{21}	R_{22}	R_{23}	R_{24}	R_{25}	R_{26}
Δa_3	R_{31}	R_{32}	R_{33}	R_{34}	R_{35}	R_{36}
Δa_4	R_{41}	R_{42}	R_{43}	R_{44}	R_{45}	R_{46}
Δa_5	R_{51}	R_{52}	R_{53}	R_{54}	R_{55}	R_{56}
Δa_6	R_{61}	R_{62}	R_{63}	R_{64}	R_{65}	R_{66}

Analógicamente se escribe la ecuación (9.16). Las matrices de los coeficientes R_{ij} se dan en la tabla 11a.

Los coeficientes del efecto electroóptico cuadrático escritos en forma matricial y tensorial están enlazados por medio de las correlaciones siguientes:

$$R_{mn} = R_{ijkl}, \quad \text{siendo } m \text{ y } n = 1, 2, 3,$$
$$R_{mn} = 2R_{ijkl}, \quad \text{siendo } m \text{ o } n = 4, 5, 6,$$
$$R_{mn} = 4R_{ijkl}, \quad \text{siendo } m \text{ y } n = 4, 5, 6.$$

Con los campos eléctricos prácticamente posibles tiene lugar la siguiente correlación: $1 \gg r_{ijk}E_k \gg R_{ijkl}E_kE_l$, es decir, el efecto cuadrático da pocas adiciones en comparación con el cambio lineal de las constantes de polarización. Sin embargo, en los cristales de las clases centrosimétricas y en los cuerpos isótropos, particularmente en los líquidos para los cuales $r_{ijk} = 0$, el efecto cuadrático desempeña el papel principal.

Ejemplos de solución de los problemas

9.1. Para medir los coeficientes que caracterizan las propiedades electroópticas de una lámina cristalina de la sección Z del cristal de KDP (véase la fig. 2.3), en ésta se observó el efecto electroóptico longitudinal. Utilizando la luz monocromática con $\lambda = 5460$ Å, la diferencia de recorridos de $\lambda/2$ fue lograda con la tensión de 7,9 kV. Calcular la magnitud del coeficiente electroóptico que puede ser obtenido por medio de los datos de las mediciones.

Solución. Para los cristales de KDP, la matriz de los coeficientes del efecto lineal electroóptico tiene tres componentes diferentes de cero (véase la tabla 11):

$$r_{41}, \quad r_{52}, \quad r_{63}.$$

En ausencia del campo la ecuación de la indicatriz óptica toma la forma

$$a_1^0(x_1^2 + x_2^2) + a_3^0 x_3^2 = 1,$$

donde $a_1^0 = 1/n_o^2$; $a_3^0 = 1/n_e^2$; n_o, n_e son los índices de refracción de las ondas ordinaria y extraordinaria, respectivamente.

El campo está aplicado a las caras de una lámina de la sección Z, por lo tanto, $E_1 = E_2 = 0$, $E_3 = |\mathbf{E}|$. De ahí, conforme a (9.3),

$$\Delta a_6 = a_6 = r_{63}E_3.$$

La ecuación de la indicatriz óptica toma en este caso la forma

$$a_1^0(x_1^2 + x_2^2) + a_3^0 x_3^2 + 2r_{63}E_3 x_1 x_3 = 1.$$

Puesto que la luz se propaga en la dirección del eje X_3, los valores de los índices de refracción son iguales a las magnitudes de los semiejes de la sección de indicatriz óptica que es perpendicular al eje X_3.

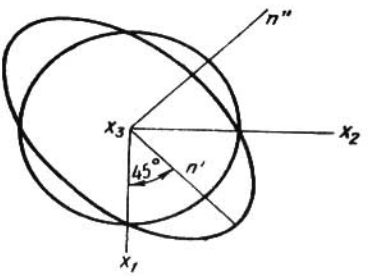


Fig. 9.1.

La sección de la indicatriz por el plano coordenado X_1X_2 representa una elipse cuyos semiejes no coinciden con los ejes cristalofísicos X_1 y X_2. Puesto que la ecuación de la elipse

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{n_0^2} + 2r_{63}x_1x_2E_3 = 1$$

es simétrica respecto de la permutación de los ejes de coordenadas X_1 y X_2, podemos sacar la conclusión de que los semiejes de la elipse forman con los ejes cristalofísicos de coordenadas los ángulos de 45° (fig. 9.1).

Este resultado se puede obtener también del principio de Curie. En ausencia del campo eléctrico, los ejes principales X_1 y X_2 del cristal de simetría $\bar{4}2m$ coinciden con los ejes 2. Al aplicar el campo a lo largo de [001], obtenemos un ctistal de simetría *mm*, cuyos ejes principales coinciden con las posiciones de las normales a los planos *m* que se sitúan bajo el ángulo de 45° respecto a los ejes principales del cristal en ausencia del campo eléctrico.

Calculemos nuevos índices principales de refracción en el plano X_1X_2. Para esto reducimos la ecuación de la elipse a los ejes principales:

$$\left(\frac{1}{n_0^2} + r_{63}E_3\right)x_1'^2 + \left(\frac{1}{n_0^2} - r_{63}E_3\right)x_2'^2 = 1.$$

Es evidente que los nuevos coeficientes de refracción tendrán los valores:

$$\frac{1}{n'^2} = \frac{1}{n_0^2} + r_{63}E_3, \quad \frac{1}{n''^2} = \frac{1}{n_0^2} - r_{63}E_3.$$

De ahí,

$$n'^2 = \frac{n_0^2}{1 + r_{63}E_3 n_0^2}, \quad n''^2 = \frac{n_0^2}{1 - r_{63}E_3 n_0^2};$$

$$n' = \sqrt{\frac{n_0^2}{1 + r_{63}E_3 n_0^2}} = n_0 \sqrt{\frac{1}{1 + r_{63}E_3 n_0^2}},$$

$$n'' = \sqrt{\frac{n_0^2}{1 - r_{63}E_3 n_0^2}} = n_0 \sqrt{\frac{1}{1 - r_{63}E_3 n_0^2}}.$$

Utilicemos la conocida correlación justa para el caso de las α pequeñas:

$$\sqrt{\frac{1}{1+\alpha}} \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha.$$

Puesto que $r_{63}\ E_3 n_0^2$ es magnitud pequeña, entonces

$$n' = n_0 \left(1 + \frac{1}{2} r_{63} E_3 n_0^2\right) = n_0 + \frac{1}{2} r_{63} E_3 n_0^3,$$

$$n'' = n_0 \left(1 - \frac{1}{2} r_{63} E_3 n_0^2\right) = n_0 - \frac{1}{2} r_{63} E_3 n_0^3.$$

En fin de cuentas tendremos un cristal biaxial con los coeficientes de refracción principales:

$$n' = n_0 + \frac{1}{2} r_{63} E_3 n_0^3,$$

$$n'' = n_0 - \frac{1}{2} r_{63} E_3 n_0^3,$$

$$n''' = n_0.$$

El valor de la birrefringencia para la luz que se propaga en una lámina de la sección Z perpendicularmente a sus caras es

$$n' - n'' = r_{63} E_3 n_0^3.$$

Por consiguiente,

$$r_{63} E_3 n_0^3 d = \frac{\lambda}{2},$$

de donde $r_{63} = \lambda/2Vn_0^3$. Para $\lambda = 5460$ Å, $n_0 = 1{,}51152$, $V_{\lambda/2} = 7{,}9$ kV y

$$|r_{63}| = \frac{5\,460 \cdot 10^{-8} \cdot 300}{2 \cdot 7{,}9 \cdot 10^3 \cdot 3{,}4566} \approx 30 \cdot 10^{-8} \text{ unid. CGSE.}$$

9.2. Es sabido que la modulación de alta frecuencia de la luz se puede realizar utilizando el efecto cuadrático electro-

óptico en los cristales de titanato de bario en su modificación cúbica, es decir, a la temperatura mayor que el punto superior de Curie ($T_C = 120$ °C).

Calcular el valor de la tensión de mando $V_{\lambda/2}$ de la lámina de la sección X de titanato de bario, de espesor de 0,3 cm, para la luz cuya longitud de onda es de 5460 Å. ¿En qué régimen debe trabajar esta lámina: en el de efecto longitudinal o en el de efecto transversal?

Nota. $V_{\lambda/2}$ es la tensión con la cual la lámina da la diferencia de recorridos de $\lambda/2$.

Solución. A la temperatura indicada los cristales de titanato de bario pertenecen a la clase $m3m$. La ecuación de la indicatriz óptica, en ausencia del campo, para ellos es $a^0 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 1$. Aplicando el campo exterior en [100] ($E_1 = E$, $E_2 = E_3 = 0$), las variaciones de las constantes de polarización de los cristales de titanato de bario conforme a (9.15) son

$$\Delta a_1 = R_{11}E_1^2, \quad \Delta a_2 = \Delta a_3 = R_{12}E_1^2,$$

y la ecuación de la indicatriz óptica toma la forma

$$(a^0 + R_{11}E_1^2)\, x_1^2 + (a^0 + R_{12}E_1^2)\,(x_2^2 + x_3^2) = 1.$$

Como se ve de la última ecuación, bajo la acción del campo el cristal se hace ópticamente uniaxial, con el eje óptico que coincide con la dirección del campo; al mismo tiempo, los ejes principales de las indicatrices ópticas del cristal coinciden antes y después de la superposición del campo.

Hallemos los valores de los nuevos índices principales de refracción:

$$\frac{1}{n_1'^2} = \frac{1}{n_0^2} + R_{11}E^2 = \frac{1 + R_{11}E^2 n_0^2}{n_0^2}, \quad n_1' = n_0\left(1 - \frac{R_{11}E^2 n_0^2}{2}\right).$$

Analógicamente,

$$n_2' = n_3' = n_0\left(1 - \frac{R_{12}E^2 n_0^2}{2}\right).$$

Puesto que $n_2' = n_3'$, utilizando el efecto electroóptico longitudinal, la birrefringencia de la lámina de la sección X será nula. La lámina de la sección X, igual que las láminas de las secciones Y y Z, trabajará solamente en el régimen del efecto cuadrático electroóptico transversal, cuando la dirección del campo y la dirección de la propagación de la luz son mutuamente perpendiculares.

La birrefringencia en este caso es igual a:

$$n_2' - n_1' = \frac{n_0^3}{2} E^2 (R_{11} - R_{12}).$$

La diferencia de recorridos, igual a $\lambda/2$, es:

$$\frac{n_0^3}{2} E^2 (R_{11} - R_{12})\, d; \quad \text{de aquí, } V_{\lambda/2}^2 = \frac{d\lambda}{n_0^3 (R_{11} - R_{12})}.$$

Para el caso dado $d = 0{,}3$ cm, $\lambda = 5460 \cdot 10^{-8}$ cm, $n_0 = 2{,}4$, $R_{11} - R_{12} = 1{,}44 \cdot 10^{-12}$ unid.CGSE, $V_{\lambda/2} \approx 1{,}6$ kV.

9.3. En los dispositivos para la modulación de alta frecuencia de la luz (del orden de 10^8—10^9 Hz) en calidad de elementos electroópticos se emplean los cristales de ADP y KDP.

Calcular los valores de las tensiones de mando $V_{\frac{\lambda}{2}}$ ($\lambda = 5460$ Å) para el modulador que consiste en una lámina de la sección Z de ADP que trabaja en el régimen del efecto electroóptico longitudinal, para los casos: a) de la modulación de baja frecuencia, b) de la modulación de frecuencia superelevada.

Solución. La magnitud de la birrefringencia de la lámina de la sección Z de ADP, inducida por la aplicación del campo eléctrico a sus caras activas, es igual a $r_{63} E_3 n_0^3$ (véase el problema 9.1) y la diferencia de recorridos que corresponde a $\lambda/2$ es $r_{63} V n_0^3$; de aquí, $V = \lambda/(2 r_{63} n_0^3)$.

Si a la lámina cristalina está aplicado un campo eléctrico de baja frecuencia (la frecuencia del campo es mucho menor de la frecuencia resonante de la lámina), en este caso, el coeficiente r_{63} que determina la magnitud de la birrefringencia inducida de tal lámina es la suma de los coeficientes de los efectos primario y secundario y es igual a $-25 \cdot 10^{-8}$ unid. CGSE.

Por lo tanto, $V_{\lambda/2}$ para la lámina de ADP de la sección Z utilizada como el modulador de baja frecuencia es

$$\frac{5\,460 \cdot 10^{-8} \cdot 300}{2 \cdot 25 \cdot 10^{-8} (1{,}5266)^3} \approx 9{,}2 \text{ kV}.$$

Con las frecuencias que sobrepasan las frecuencias resonantes, los elementos electroópticos trabajan en el régimen del apriete piezoeléctrico. La modulación en este caso es condicionada sólo por el efecto electroóptico primario («verdadero») y la magnitud de la birrefringencia inducida de la lámina de la sección Z se determina por el coeficiente r_{63}^*.

Conforme a (9.6),

$$r_{63} = r^*_{63} + p_{66} d_{36} = r^*_{63} + \pi_{66} c_{66} d_{36};$$

de aquí,

$$r^*_{63} = r_{63} - \pi_{66} c_{66} d_{36} = -17{,}5 \cdot 10^{-8} \text{ unid. CGSE.}$$

Por lo tanto, $V_{\lambda/2}$ para la lámina de la sección Z de ADP utilizada para la modulación de frecuencia superelevada de la luz es

$$\frac{5\,460 \cdot 10^{-8} \cdot 300}{2 \cdot 17{,}5 \cdot 10^{-8} (1{,}5266)^3} \approx 13{,}1 \text{ kV}.$$

9.4. La medición experimental del ángulo de giro de la indicatriz óptica del cristal (dominio) de la sal de Seignette, condicionada por el efecto electroóptico espontáneo, y la medición de la magnitud de la polarización espontánea $\bar{P}^s \parallel [100]$ han dado, respectivamente, los valores de 0,8° y $7{,}5 \cdot 10^2$ unid.CGSE. ¿Cuál de los coeficientes electroópticos de la sal de Seignette podemos determinar por los resultados del experimento? Cualcular su valor, considerando que los coeficientes de refracción n_2 y n_3 no tienen cambios sustanciales. Apreciar la correlación entre el efecto «verdadero» y «falso».

Solución. En la fase paraeléctrica, es decir, más arriba del punto superior de Curie, la sal de Seignette es el cristal ópticamente biaxial con la simetría de 222, en la fase ferroeléctrica la simetría de la sal de Seignette es de 2.

La ecuación de la indicatriz óptica en la fase paraeléctrica tiene la forma:

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 1,$$

donde

$$a_1 = \frac{1}{n_1^2}, \quad a_2 = \frac{1}{n_2^2}, \quad a_3 = \frac{1}{n_3^2}.$$

Debido a que en la modificación paraeléctrica los cristales de la sal de Seignette pertenecen a una de las 20 clases no centrosimétricas y, por consiguiente, su matriz (m_{ij}) contiene componentes diferentes de cero, la aparición de la polarización espontánea se acompaña del efecto electroóptico lineal espontáneo. El cambio de constantes de polarización que se debe a la presencia de polarización espontánea $P^s \parallel [100]$ ($P_1 = |P^s|$, $P_2 = P_3 = 0$) de acuerdo a la forma de la matriz (m_{ij}) para los cristales de simetría 2, según

(9.4), es igual a:

$$\Delta a_4 = m_{41} P_1 = m_{41} P^s.$$

La ecuación de la indicatriz óptica en este caso toma la forma:

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + 2 m_{41} P^s x_2 x_3 = 1,$$

e indica que la indicatriz óptica en la fase ferroeléctrica es girada en cierto ángulo α alrededor del eje X_1. La tarea de encontrar el ángulo α se reduce a la tarea de hallar las direcciones principales de la matriz de la forma siguiente:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{n_2^2} & m_{41} P^s \\ m_{41} & \frac{1}{n_3^2} \end{vmatrix}.$$

Los valores propios de esta matriz son:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_2^2} + \frac{1}{n_3^2}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_3^2}\right)^2 + m_{41}^2 P^{s2}},$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_2^2} + \frac{1}{n_3^2}\right) \pm \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_3^2}\right)\left[1 + \frac{1}{2}\,\frac{4 m_{41}^2 P^{s2}}{\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_3^2}}\right].$$

Teniendo en cuenta que la magnitud $m_{41} P^s$ es infinitésima, obtenemos:

$$\lambda_1 = \frac{1}{n_{x_2'}^2} = \frac{1}{n_2^2} + \frac{m_{41}^2 P^{s2}}{\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_3^2}},$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{n_{x_3'}^2} = \frac{1}{n_3^2} - \frac{m_{41}^2 P^{s2}}{\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_3^2}}.$$

Colocando en la matriz los valores de λ_1 y λ_2, hallamos las direcciones principales que les corresponden:

$$\begin{vmatrix} -\frac{m_{41}^2 P^{s2}}{\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_3^2}} & m_{41} P^s \\ m_{41} P^s & \frac{1}{n_3^2} - \frac{1}{n_2^2} \end{vmatrix}.$$

El valor de tg α se determina por la correlación:

$$\frac{m_{41}^2 P^{s2}}{1/n_2^2 - 1/n_3^2} \Big/ m_{41} P^s.$$

Puesto que el ángulo α es pequeño, entonces

$$\operatorname{tg}\alpha \simeq \alpha \simeq m_{41}P^s \Big/ \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_3^2},$$

por consiguiente, según los resultados del experimento podemos determinar el coeficiente m_{41}. Colocando en la expresión para m_{41} los valores de α, P^s con 0° C, y, también, los valores de n_2 y n_3 (véase la tabla 12) obtenemos la magnitud de $m_{41} = 0{,}224 \cdot 10^{-7}$ unid. CGSE. La correlación entre los efectos «verdadero» y «falso» se puede apreciar valiéndose de la correlación (9.8) que en forma matricial en el caso dado toma la forma:

$$m_{41} = m_{41}^* + P_{44}g_{14}.$$

Para los cristales de la sal de Seignette: $g_{14} = 6{,}7 \cdot 10^{-7}$ unid. CGSE,

$$P_{44} = 8{,}95 \cdot 10^{-3} \text{ unid. CGSE (véase la tabla 12)},$$

$$P_{44}g_{14} = 0{,}6 \cdot 10^{-8} \text{ unid. CGSE},$$

de donde se desprende que el efecto «falso» en la sal de Seignette constituye el 27% del «verdadero».

9.5. El principio del funcionamiento del deflector cristalino con el ángulo de reflexión dirigido se describe en el problema 8.3.

En la fig. 9.2. está representado el esquema del prisma del cloruro cuproso y están indicadas las direcciones de la luz incidente y de la luz reflejada, y también la dirección en que actúa el campo eléctrico. ¿En qué campo de mando es

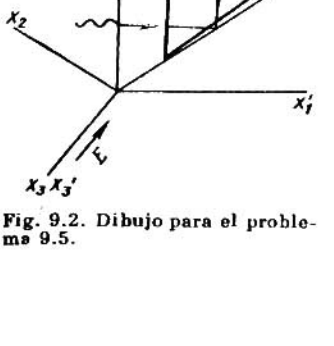


Fig. 9.2. Dibujo para el problema 9.5.

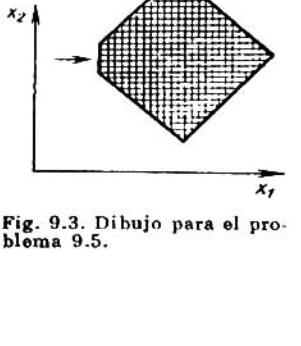


Fig. 9.3. Dibujo para el problema 9.5.

necesario colocar el prisma de CuCl para que la señal luminosa que sale del prisma, con $\lambda = 0{,}535\ \mu$, se desvíe de la dirección de la señal no perturbada en el ángulo de 20'? ¿Qué debe ser el campo de mando para la misma desviación de la señal, si utilizamos el deflector de la reflexión interna múltiple (fig. 9.3) con el número de reflexiones de 10^3, si la señal de salida se desvía por tal deflector en el ángulo $\theta = \psi m$, donde m es el número de las reflexiones internas, ψ es el ángulo de desviación debida a una reflexión?

Solución. Según indica la fig. 9.2, la luz incidente está dirigida a lo largo del eje X_1' y el campo eléctrico, a lo largo del eje X_3'. La orientación del sistema de coordenadas $X_1'X_2'X_3'$ respecto de los ejes cristalofísicos $X_1X_2X_3$ se determina por la siguiente matriz de los cosenos directores·

	X_1	X_2	X_3
X_1'	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
X_2'	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
X_3'	0	0	1

Según (9.1) $\Delta a_{ij}' = r_{ijk}' E_k'$. Puesto que el campo eléctrico actúa en la dirección del eje X_3' la única componente del campo diferente del cero será la componente $E_3 = |E|$. Por lo tanto,

$$\Delta a_{11}' = r_{113}' E_3', \quad \Delta a_{22}' = r_{223}' E_3'.$$

Puesto que los coeficientes r_{ijk}' son las componentes del tensor polar del tercer rango,

$$r_{113}' = C_{1i} C_{1j} C_{3k} r_{ijk},$$
$$r_{223}' = C_{2i} C_{2j} C_{3k} r_{ijk},$$

donde r_{ijk} son los coeficientes electroópticos diferentes de cero del cloruro cuproso, referidos al sistema de coordenadas cristalofísico, C son los elementos de la matriz de cosenos directores arriba citada.

Para la clase de simetría $\bar{4}3m$, a que pertenecen los cristales del cloruro cuproso, en el sistema de coordenadas cristalofísico son diferentes de cero los coeficientes r_{14}, r_{25}, r_{36} con la particularidad de que $r_{14} = r_{25} = r_{36}$,

$$r_{113}' = C_{11} C_{12} C_{33} r_{123} + C_{12} C_{11} C_{33} r_{213} = r_{123} = r_{63}.$$

Analógicamente,

$$r'_{223} = C_{21}C_{22}C_{33}r_{123} + C_{22}C_{21}C_{33}r_{123} = -r_{123} = -r_{63};$$

$$\psi = n_0^3 r_{63} E; \quad E = 1{,}2 \cdot 10^6 \text{ V/cm}.$$

Para el deflector con el número de desviaciones de 10^3, $E = 1{,}2 \cdot 10^3$ V/cm. De este modo, la utilización del deflector de la reflexión interna múltiple (fig. 9.3) nos permite rebajar la magnitud del campo hasta los campos corrientemente alcanzables (10^3—10^4 V/cm).

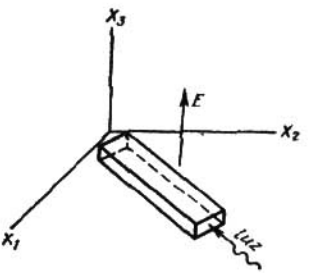


Fig. 9.4. Dibujo para el problema 9.6.

9.6. ¿Qué ganancia en la tensión moduladora podemos obtener, utilizando como elemento modulador la probeta de la sección Z de 45° de ADP con las dimensiones de $3 \times 3 \times 100$ mm^2 ($l = 100$ mm, $d = 3$ mm) que trabaja en el régimen del efecto electroóptico transversal (fig. 9.4), en comparación con el mismo modulador que trabaja en el régimen del efecto longitudinal?

Solución. Según nos indica la fig. 9.4,

$$E_1 = E_2 = 0; \quad E_3 = |E|;$$

y la ecuación de la indicatriz óptica del cristal de ADP toma en este caso la forma siguiente:

$$a_1 (x_1^2 + x_2^2) + a_3 x_3^2 + 2r_{63} E_3 x_2 x_1 = 1.$$

Según demuestra el problema 9.1, los ejes principales de la indicatriz óptica $X_1' X_2' X_3'$ están enlazados con los ejes iniciales $X_1 X_2 X_3$ mediante el giro de 45° alrededor del eje X_3 (fig. 9.1). De este modo, la dirección [110], que es la dirección de la propagación de la señal luminosa, en este caso es uno de los ejes principales de la indicatriz óptica, el eje X_1'. La sección del elipsoide de los índices de refracción por el plano $X_1' = 0$ nos da la elipse $(a_1 + r_{63}E) x_2'^2 + a_3 x_3'^2 = 1$.

De ahí se deduce que $n_{x_2'} = n_o (1 - 1/2 n_0^3 r_{63} E)$, $n_{x_3'} = n_e$, y las componentes de la luz, polarizadas según los ejes X_2' y X_3' (X_3) se propagan con las velocidades

$$v_{x_2'} = \frac{c}{n_o}(1 - 1/2 n_0^3 r_{63} E), \quad v_{x_3'} = c/n_e.$$

La diferencia completa de fase entre las componentes de la luz, polarizadas a lo largo de los ejes X_2' y X_3' es:

$$\Gamma = 2\pi l/\lambda\,(n_e - n_o) + \frac{\pi n_o^3 r_{63} El}{\lambda},$$

siendo el término $\frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)$ condicionado por la anisotropía natural del cristal y el término $\pi n_o^3 r_{63} El/\lambda$, por la aplicación del campo eléctrico. La tensión de semionda que corresponde al cambio de la diferencia de fase en π en el caso dado es:

$$V_{\lambda/2} = \frac{\lambda d}{l n_o^3 r_{63}}.$$

Comparando esta magnitud con la tensión de semionda del elemento modulador en el efecto longitudinal (véase el problema 9.1) obtenemos, que la tensión de semionda durante la utilización del efecto transversal en $l/2d$ y en el caso de los cristales de ADP es 33 veces menor que durante el empleo del efecto longitudinal. Además de la ganancia en la tensión moduladora las ventajas del efecto electroóptico transversal consisten también en la construcción más sencilla de los electrodos puesto que no hay necesidad de hacer pasar la luz a través de los electrodos, lo que tiene lugar durante el empleo del efecto longitudinal.

9.7. Los valores de los coeficientes del efecto electroóptico lineal r_{22}^* y r_{33}^* de los cristales de niobato de litio, medidas en el campo eléctrico cuya frecuencia sobrepasó las frecuencias propias de las oscilaciones de la probeta, son de 10^{-6} unid. CGSE

$$r_{22}^* = 0{,}1, \quad r_{33}^* = 0{,}9.$$

Calcular los valores de los coeficientes correspondientes que caracterizan las propiedades electroópticas del niobato de litio en los campos estáticos y de bajas frecuencias. ¿Cuál de los coeficientes indicados dependerá en la medida más grande de la frecuencia?

Solución. Las magnitudes halladas de los coeficientes electroópticos caracterizan el efecto electroóptico «verdadero» porque son medidas en las frecuencias que sobrepasan las frecuencias propias de oscilaciones de la probeta. En este caso el cristal está mecánicamente «apretado», puesto que sus deformaciones no pueden seguir las oscilaciones del campo eléctrico externo. Los valores de los coeficientes

electroópticos r_{22} y r_{33} que caracterizan las propiedades del niobato de litio en los campos estáticos y de bajas frecuencias son mayores en la magnitud de la parte del efecto elastoóptico, puesto que en este caso el cristal, siendo mecánicamente «libre», se deforma y la deformación, a su vez, según (8.7), origina el cambio complementario de las constantes de polarización. La ecuación (9.6) permite calcular los valores de los coeficientes que nos interesan.

Las matrices de los coeficientes d_{ij} y P_{ij} necesarias para calcular los coeficientes r_{22} y r_{33} para los cristales de simetría $3m$, a que pertenece el niobato de litio, tienen la forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & -2d_{21} \\ d_{21} & -d_{21} & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} & 0 & 0 \\ P_{12} & P_{11} & P_{13} & -P_{14} & 0 & 0 \\ P_{31} & P_{31} & P_{33} & 0 & 0 & 0 \\ P_{41} & -P_{41} & 0 & P_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{44} & P_{41} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{44} & P_{41} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{41} & \frac{P_{11}-P_{12}}{2} \end{Vmatrix}$$

Según (9.6) y en correspondencia con la forma de las matrices (d_{ij}) y (P_{ij}) obtenemos:

$$r_{22} = r_{22}^{*} + P_{2211}d_{211} + P_{2222}d_{222} + 2P_{2223}d_{223} =$$
$$= r_{22}^{*} + P_{21}d_{21} - P_{22}d_{21} + 2P_{24}d_{24} = r_{22}^{*} + (P_{12} - P_{11})\,d_{21} -$$
$$- P_{14}d_{15} = 0{,}194 \cdot 10^{-6} \text{ unid. CGSE}$$

De este modo, el coeficiente r_{22} que caracteriza las propiedades electroópticas del niobato de litio en el campo de baja frecuencia o estático es dos veces mayor del coeficiente r_{22}^{*} que caracteriza las propiedades indicadas en el campo eléctrico de alta frecuencia.

Hallemos el valor del coeficiente r_{33}:

$$r_{33} = r_{33}^{*} + 2P_{31}d_{31} + P_{33}d_{33} = 0{,}9004 \cdot 10^{-6} \text{ unid. CGSE.}$$

De aquí se deduce que el coeficiente r_{33} se diferenciará del coeficiente r_{33}^{*} en el 0,4 %.

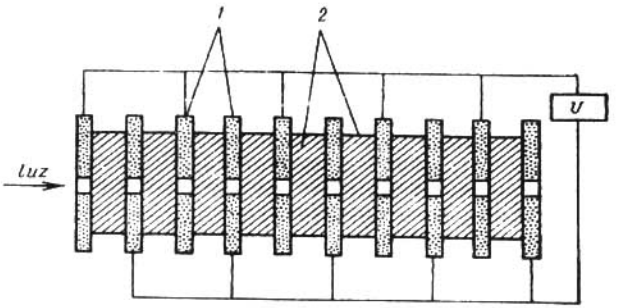


Fig. 9.5. Esquema de principio de la célula moduladora con los cristales de N: 1-electrodos; 2-láminas cristalinas.

Es evidente que de los dos coeficientes r_{22} y r_{33} el que dependerá más de la frecuencia es el coeficiente r_{22}.

9.8. En el dibujo de la fig. 9.5 está representada la construcción de la célula moduladora que consta de N láminas cristalinas de la sección Z de KDP divididas por los electrodos con los campos eléctricos de signos alternativos. ¿Cómo deben estar orientadas estas láminas para que la diferencia de fase creada por dos láminas sucesivas sea igual a la suma de diferencias tomadas por separado? ¿Qué magnitud tendrá la tensión de semionda de esta célula que contiene diez láminas ($N = 10$), si la célula tiene por objeto la modulación de baja frecuencia de la luz con $\lambda = 0{,}546\mu$? ¿Qué tensión de semionda debe ser para el caso en que el elemento modulador consta de una lámina de la sección Z de KDP?

Solución. Según demuestra la fig. 9.5, los elementos moduladores que representan en sí las láminas cristalinas de la sección Z de KDP se emplean en el régimen del efecto electroóptico longitudinal. Por lo tanto, la magnitud de la birrefringencia inducida por la aplicación del campo eléctrico dirigido a lo largo de [001], para la señal luminosa que se propaga en la misma dirección es igual a $r_{63}n_0^3E$ (véase el problema 9.1) y la diferencia correspondiente de fase (retardo de fase) de la señal luminosa durante el recorrido del trayecto d (el grosor de la lámina) es

$$\frac{2\pi}{\lambda} n_0^3 Ed = \frac{2\pi}{\lambda} n_0^3 V.$$

Por consiguiente, con el efecto longitudinal la diferencia de fase (y, respectivamente, la profundidad de modulación) depende de la tensión en la lámina cristalina y no depende de su grosor. Por eso, el elemento modulador puede ser cortado en forma de una lámina delgada. Si tomamos un juego de tales láminas y aplicamos a cada una de ellas la misma tensión V, la diferencia total de fase Γ entre las componentes ortogonalmente polarizadas del rayo luminoso, siendo el campo superpuesto, será igual a $N\Gamma$, donde N es el número de las láminas. Si en el cristal de KDP actúa el campo en la dirección de [001], entonces

$$n_{x_1'} = n_o \left(1 + \frac{1}{2} n_0^3 r_{63} E\right),$$

$$n_{x_2'} = n_o \left(1 - \frac{1}{2} n_0^3 r_{63} E\right),$$

(véase el problema 9.1). Esto significa que la velocidad de la componente de la luz, polarizada por el eje X_1', igual a $c/n_o\ (1 + \frac{1}{2} n_0^3 r_{63} E)$, es menor que la componente de la luz, polarizada por el eje X_2' e igual a $c/n_o\ (1 - \frac{1}{2} n_0^2 r_{63} E)$. El desfasaje es $\Gamma > 0$. Al cambiar el signo del campo,

$$n_{x_1'} = n_o \left(1 - \frac{1}{2} n_0^3 r_{63} E\right),$$

$$n_{x_2'} = n_o \left(1 + \frac{1}{2} n_0^3 r_{63} E\right).$$

En este caso la componente de la luz, polarizada por el eje X_1', adelanta la componente, polarizada por el eje X_2', y $\Gamma < 0$. Es evidente que para que la diferencia de fase, creada por dos láminas sucesivas de KDP, sea igual a la suma de diferencias de recorridos, adquiridas por la señal luminosa en cada una de las láminas, cada lámina sucesiva debe estar girada en 90° alrededor del eje X_3' respecto de la anterior. El valor de la tensión de mando $V_{\lambda/2}$ para una lámina moduladora en el caso de la modulación de baja frecuencia para la señal luminosa con $\lambda = 0{,}546\mu$ se calcula, partiendo de la correlación:

$$V_{\lambda/2} = \lambda / 2 r_{63} n_0^3 \simeq 7{,}9 \text{ kV}.$$

Por lo tanto, la magnitud de la tensión de mando para la célula moduladora de diez láminas es $\simeq$ 0,79 kV.

9.9. La investigación del efecto electroóptico cuadrático en los cristales de KDP se realizó en las probetas de dimensiones de $1 \times 1 \times 1$ cm^3. Los valores de las tensiones de mando necesarias para obtener la diferencia de recorridos de media onda para la luz con $\lambda = 0{,}540\mu$, correspondientes a determinadas direcciones del campo y paso de la luz, se dan en la tabla 9.1.

Tabla 9.1

Dirección del campo	Dirección del paso de la luz	Tensión de mando $V_{\lambda/2}$ kV/cm
a. [001]	[010]	13,2
b. [110]	[001]	42,4

¿Cuáles de los coeficientes R_{ij} (o de sus combinaciones) se puede calcular según estos datos?

Solución. El efecto electroóptico cuadrático de los cristales de KDP se caracteriza por la siguiente matriz de los coeficientes (véase la tabla 11):

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & 0 & 0 & 0 \\ R_{12} & R_{11} & R_{13} & 0 & 0 & 0 \\ R_{31} & R_{31} & R_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{66} \end{pmatrix}$$

a) El campo eléctrico aplicado a lo largo del eje X_3 del sistema de coordenadas cristalofísico ($X_3 \parallel [001]$), conduce a *que la ecuación de la indicatriz óptica, que antes de la* superposición del campo tuvo la forma:

$$a_1 (x_1^2 + x_2^2) + a_3 x_3^2 = 1,$$

se convierta en la ecuación siguiente:

$$(a_1 + R_{13} E_3^2)(x_1^2 + x_2^2) + (a_3 + R_{33} E_3^2) x_3^2 = 1,$$

donde $a_1 = 1/n_o^2$, $a_3 = 1/n_e^2$.

De aquí hallamos los valores de los nuevos índices de refracción:

$$n_{x_1'} = n_{x_2'} = n_o - \frac{n_o^3}{2} R_{13} E_3^2,$$

$$n_{x_3'} = n_e - \frac{n_e^3}{2} R_{33} E_3^2.$$

Así pues, durante la propagación de la luz a lo largo de [010] la magnitud de la birrefringencia se plantea por la correlación de la forma:

$$n_{x_1'} - n_{x_3'} = (n_o - n_e) + \frac{1}{2}(n_e^3 R_{33} - n_o^3 R_{13}) E_3^2 = \\ = (n_o - n_e) + \frac{1}{2} R_a E_3^2,$$

y la magnitud de la birrefringencia, inducida por la aplicación del campo, es:

$$\frac{1}{2}(n_e^3 R_{33} - n_o^3 R_{13}) E_3^2 = \frac{1}{2} R_a E_3^2.$$

Por lo tanto, midiendo la magnitud de la tensión de mando $V_{\lambda/2}$ se puede determinar el coeficiente R_a que resulta ser igual a $3{,}4 \cdot 10^{-13}$ unid. CGSE.

b) Si el campo eléctrico está aplicado por [110], entonces $E_1 = E_2 \neq 0$, $E_3 = 0$, de aquí $E_1 E_2 = E_2 E_2 = E_1 E_2 \neq \neq 0$, en las designaciones matriciales $E_1^2 = E_2^2 = E_6^2 \neq 0$ *y la indicatriz óptica de los cristales de* KDP *toma en este* caso la forma

$$(a_{11} + R_{11} E_1^2 + R_{12} E_2^2) x_1^2 + (a_{22} + R_{12} E_1^2 + R_{11} E_2^2) x_2^2 + \\ + [a_{33} + R_{31}(E_1^2 + E_2^2)] x_3^2 + 2 R_{66} E_6^2 x_1 x_2 = 1.$$

Durante la propagación de la luz en la dirección de [001] la magnitud de la birrefringencia se plantea por la diferencia: $n_{x_1'} - n_{x_2'}$. Los valores de $n_{x_1'}$ y $n_{x_2'}$ para nuestro caso son iguales a:

$$n_{x_1'} = n_o - \frac{1}{2} n_0^3 (R_{11} + R_{12}) E^2 - \frac{1}{2} n_0^3 R_{66} E^2,$$

$$n_{x_2'} = n_o - \frac{1}{2} n_0^3 (R_{11} + R_{12}) E^2 + \frac{1}{2} n_0^3 R_{66} E^2,$$

$$n_{x_2'} - n_{x_1'} = n_0^3 R_{66} E^2.$$

Por consiguiente, valiéndose de los datos de la tabla 9.1, se puede determinar las siguientes magnitudes:

$$R_a = n_e^3 R_{33} - n_o^3 R_{13} \quad \text{y} \quad R_{66}.$$

9.10. El prisma del deflector cristalino cuyo principio de funcionamiento consiste en el cambio del ángulo de la reflexión total interna durante la acción de los campos eléctricos, está representado en la fig. 9.2.

¿En qué campo de mando es necesario colocar tal prisma de titanato de bario de la modificación cúbica para que el rayo saliente del prisma pueda desviarse de la dirección del rayo no perturbado en 30'?

Solución. La posibilidad de controlar la dirección del rayo luminoso por medio del prisma de desviación de titanato de bario de modificación cúbica colocado en el campo eléctrico es condicionada por el efecto electroóptico cuadrático.

Si consideramos la dirección de la luz incidente la dirección del eje X_1', la dirección de la luz reflejada, la dirección del eje X_2' y la dirección en que actúa el campo eléctrico, la dirección del eje X_3', entonces la orientación de estos ejes respecto de los ejes cristalofísicos $X_1X_2X_3$ se determinará por la siguiente matriz de cosenos:

	X_1	X_2	X_3
X_1'	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
X_2'	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
X_3'	0	0	1

Por cuanto $E_1 = E_2 = 0$; $E_3 = E$, entonces según (9.10) los cambios de las constantes de polarización que forman parte de la expresión para $\Delta\theta_{refl}$ se hallarán de las siguientes correlaciones:

$$\Delta a_{11}' = R_{1133}'(E_3')^2 = R_{1133}'E^2,$$
$$\Delta a_{22}' = R_{2233}'E^2,$$

donde R_{1133}' y R_{2233}' son los coeficientes del efecto electroóptico cuadrático en el sistema de coordenadas $X_1'X_2'X_3'$. Por cuanto los coeficientes R_{ijkl} son las componentes del tensor de cuarto rango, en este caso

$$R_{1133}' = C_{1i}C_{1j}C_{3k}C_{3l}R_{ijkl},$$
$$R_{2233}' = C_{2i}C_{2j}C_{3k}C_{3l}R_{ijkl},$$

donde C son los elementos de la matriz de cosenos; R_{ijkl} son los coeficientes del efecto electroóptico cuadrático en el sistema de coordenadas cristalofísico. Teniendo en cuenta la forma de la matriz (R_{ij}) para los cristales de simetría $m3m$, a que pertenecen los cristales de titanato de bario de la modificación cúbica, resulta que

$$R'_{1133} = \frac{1}{2}(R_{1122} + R_{1133}) = \frac{1}{2}(R_{12} + R_{13}).$$

Para los cristales de la singonía cúbica $R_{12} = R_{13}$ (véase la tabla 11,*a*), de aquí

$$R'_{1133} = R_{1122},$$

$$R'_{2233} = \frac{1}{2}(R_{11} + R_{12} - R_{44}).$$

Por consiguiente,

$$\Delta\theta = \frac{1}{2} n^3 (\Delta a'_{11} - \Delta a'_{22}) = -\frac{1}{4} n^3 (R_{11} - R_{13} - R_{44}) E^2.$$

Problemas

9.11. ¿Si podemos observar el efecto electroóptico longitudinal en las láminas de la sección Z de los cristales de simetría $\bar{4}2m$ y $4mm$?

9.12. ¿Si se puede observar el efecto electroóptico longitudinal lineal o cuadrático en la lámina de turmalina de la sección Z?

9.13. ¿Si se puede observar los efectos electroópticos longitudinal y transversal en la lámina de la sección L de arseniuro de galio?

9.14. Enumerar las clases de simetría de los cristales de categoría media cuyas indicatrices ópticas no experimentan giros, ni deformaciones de sus ejes durante la acción del campo eléctrico dirigido por el eje del orden superior.

9.15. Calcular el valor del coeficiente electroóptico de la esfalerita, si, para la lámina cortada perpendicularmente a la dirección de [110], $V_{\lambda/2} = 12{,}3$ kV, propagándose la luz en la dirección de [110].

9.16. En la probeta de titanato de bario, cortada en forma de cubo con las aristas de 0,5 cm, se observó el efecto electroóptico transversal. Se utilizó la luz monocromática con $\lambda = 5890$ Å. ¿Qué coeficientes electroópticos se puede determinar, si el campo fue aplicado:

a) en la dirección de [100] y alcanzó la magnitud de $V_{\lambda/2} = 200$ V?

b) en la dirección de [110], alcanzando la magnitud de $V_{\lambda/2} = 250$ V? El experimento se realizó a la temperatura normal.

9.17. La lámina cristalina de la sección X de la sal de Seignette se introduce en el campo eléctrico de la intensidad E. Hallar las expresiones para los nuevos coeficientes de refracción y, también, el ángulo en que gira la indicatriz óptica, al superponer el campo.

9.18. ¿Qué espesor deberá tener la lámina cortada de un cristal de KDP perpendicularmente a la dirección de [001], para que, al aplicar el campo eléctrico $E = 10\,000$ V/cm a sus caras opuestas, la lámina nos dé la diferencia de recorridos de $\lambda/4$ para la luz con $\lambda = 5460$ Å durante su propagación a lo largo de la dirección de [001]?

9.19. La medición de la magnitud del efecto electroóptico longitudinal de la lámina mecánicamente libre de la sección Z de KDP dio el valor del coeficiente r_{63} igual a $30 \cdot 10^{-8}$ unid.CGSE. Determinar el valor de este coeficiente para el caso de trabajar esta lámina en el campo alternativo de alta frecuencia (suponiendo que la frecuencia del campo y la fijación de la lámina están elegidas de modo que la resonancia no aparece).

9.20. ¿Cuál de los coeficientes del efecto electroóptico cuadrático de titanato de bario de la modificación cúbica puede ser definido según los resultados del experimento en que se determina la magnitud de la diferencia de recorridos en la dirección de [001] inducida por la superposición del campo en la dirección de [110]?

9.21. ¿De qué espesor debe ser la lámina de arseniuro de galio cuyas caras activas son perpendiculares a la dirección de [110], si, observando el efecto electroóptico transversal, la diferencia de recorridos de $\lambda/4$ para la luz con $\lambda = 5460$ Å se debe lograr con el campo de 5250 V/cm?

9.22. ¿Qué tensión hay que suministrar a las caras activas de la lámina de la sección X de ADP, de 1 cm de grosor, para obtener con su ayuda la diferencia de recorridos ondulatoria de $4 \cdot 10^{-3}$ para la luz con $\lambda = 5460$ Å?

Observación. Se llama ondulatoria la diferencia de recorridos expresada con el número de ondas.

9.23. El obturador opaco a la luz electroóptico de acción rápida empleado para obtener la sucesión de impulsos y

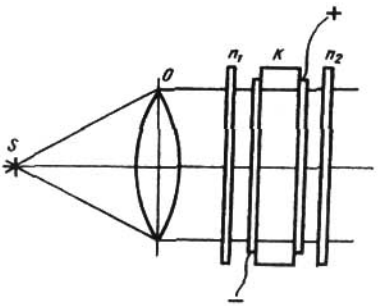


Fig. 9.6. Dibujo para el problema 9.23.

aumentar la potencia de pico de la emisión de los láseres consiste en una lámina de la sección Z de KDP colocada entre los polarizadores cruzados (fig. 9.6). En el plano de la lámina están aplicados los electrodos conductores de corriente eléctrica. ¿Qué tensión hay que suministrar al obturador para su abertura completa en el caso de la señal luminosa con $\lambda = 0{,}546\ \mu$? ¿Qué valor tendrá tal tensión para un obturador análogo que representa en sí una lámina de la sección Z de DKDP?

9.24. Calcular la magnitud de la tensión de mando $V_{\lambda/2}$ para el obturador opaco a la luz que representa en sí una lámina de la sección Y de pironiobato de calcio de las dimensiones de $5 \times 5 \times 20$ mm^3 utilizada en el régimen del efecto electroóptico transversal, si la señal luminosa con $\lambda = 0{,}546\ \mu$ se propaga en la dirección de [100].

9.25. El campo eléctrico está aplicado a la probeta monocristalina del fosfuro de galio en la dirección de [111]. ¿Si se observará o no el efecto electroóptico longitudinal en este caso? ¿Y el efecto transversal?

9.26. ¿En los cristales de qué clases tetragonales de simetría el campo eléctrico de cualquier dirección (incluido la de $\overline{E} \parallel [001]$) conduce al cambio de la simetría de la indicatriz óptica?

9.27. Altas cualidades ópticas del cuarzo permiten utilizarlo en los moduladores, a pesar de que su efecto electroóptico es pequeño. ¿Si se pueden utilizar las láminas de

cuarzo de la sección Z con los fines de modulación sobre la base del efecto electroóptico lineal?

9.28. ¿Cuáles son los cristales uniaxiales que no cambiarán sus cualidades ópticas en la aproximación lineal durante su introducción en el campo eléctrico dirigido por el eje del orden superior?

9.29. En la fig. 9.7 se representan las dependencias del coeficiente electroóptico efectivo $r_s = r_{63} n_o^3$ de los cristales de KDP y DKDP de la temperatura, medidas en el régimen estático en la longitud de onda de 0,535 μ. ¿Cuántas veces podríamos reducir la tensión de mando de los moduladores de KDP y DKDP que representan en sí las láminas de las secciones Z de 45° que trabajan en el régimen del efecto electroóptico transversal, realizando la modulación a las temperaturas próximas al punto de Curie, en comparación con los valores de $V_{\lambda/2}$, necesarios para la modulación a la temperatura normal?

¿Qué dificulta la modulación a las temperaturas próximas a la T_C?

9.30. Hallar las expresiones que permitan calcular la magnitud de la birrefringencia espontánea del cristal (dominio) de KDP, en el punto de Curie (T_C), inducida por la aparición del vector de la polarización espontánea P^s que

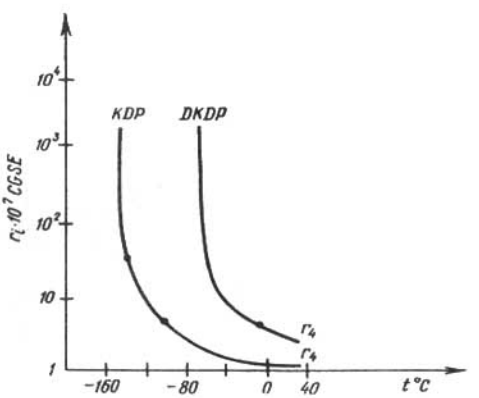


Fig. 9.7. Dependencia entre la constante electroóptica efectiva de los cristales de KDP y DKDP y la temperatura.

se sitúa a lo largo de la dirección de [001] para la luz que se propaga en las direcciones de [100], [010] y [001].

9.31. ¿Cuál de los coeficientes electroópticos del tantalato de litio se puede determinar, midiendo la magnitud de la tensión de semionda aplicada a la lámina de la sección *Z*, si en la lámina se observa el efecto electroóptico longitudinal?

9.32. En los moduladores de la gama infrarroja han hallado su aplicación práctica los monocristales de arseniuro de galio aleados con Cr y Fe. Calcular la magnitud de la diferencia de fase que se puede obtener con ayuda de la lámina monocristalina de arseniuro de galio, utilizando el efecto electroóptico transversal, si la magnitud de la intensidad del campo eléctrico dirigido por [110] es igual a 10^4 V/cm y el recorrido de la señal luminosa con $\lambda = 1{,}25\ \mu$, que se propaga en la dirección de [110], fue de 20 mm.

9.33. Los cristales de greenockita transparentes en la gama infrarroja se pueden utilizar para crear los moduladores en esta banda. ¿Qué tensión de mando es necesario aplicar al elemento modulador de greenockita que consiste en una lámina de la sección *Z* utilizada en el régimen del efecto electroóptico longitudinal para la señal luminosa con $\lambda = 0{,}515\ \mu$?

9.34. ¿Qué grosor debe tener la lámina de arseniuro de galio, cuyas caras activas son perpendiculares a la dirección de [110], si, al observar el efecto electroóptico transversal en la dirección de [1$\bar{1}$0], la diferencia de recorridos de $1/4\ \lambda$ para la luz con $\lambda = 0{,}546\ \mu$ se debe lograr con la intensidad del campo de 5,25 kV/cm?

9.35. La lámina de la sección *Z* de ADP que trabaja en el régimen del efecto electroóptico longitudinal se utilizó en calidad del elemento sensible de la instalación destinada a medir las tensiones estáticas. ¿Cuál es la magnitud de la tensión a medir, si, para obtener la opacidad completa en el centro de la figura de interferencia el analizador fue girado en 30°? La transmisión de la lámina cristalina se determina por la correlación $I = \cos^2 \times \left(\frac{\pi}{\lambda}\Delta - \varphi\right)$, donde Δ es la diferencia de recorridos inducida por la aplicación de la tensión; φ es el ángulo de giro del analizador.

Se utilizó la luz con la longitud de onda de 0,546 μ.

9.36. Para observar el efecto electroóptico en la lámina de cuarzo de la sección *X*, de 0,5 cm de grosor, se suministró a sus caras activas la tensión de 30 kV. Caracterizar el cam-

bio de las propiedades ópticas de tal lámina y determinar la magnitud del ángulo en que giran los ejes de la indicatriz óptica durante la superposición del campo.

9.37. Investigando las propiedades de los cristales de titanato de bario en la modificación tetragonal fue descubierto que al cambio de la polarización de $24 \cdot 10^3$ unid.CGSE le corresponde el cambio de los índices de refracción igual a — 0,03. Apreciar el valor del coeficiente electroóptico que se puede obtener según los resultados de este experimento.

9.38. La lámina cristalina de la sección X de la *sal de* Seignette se introduce en el campo eléctrico de la intensidad $\overline{E}$. Hallar los valores de los nuevos coeficientes de refracción y el ángulo en que gira la indicatriz óptica durante la superposición del campo.

9.39. *¿Qué grosor ha de tener la lámina de la sección* Z de KDP utilizada en calidad del obturador opaco a la luz para la filmación rápida (fig. 9.6) para que, al aplicar el campo eléctrico de $E = 10$ kV/cm a sus caras opuestas, la lámina nos dé la diferencia de recorridos de $\lambda/4$ para la luz, *con la longitud de onda* $\lambda = 0{,}546\ \mu$, *durante su propagación* a lo largo de la dirección de [001]?

9.40. La medición de la magnitud del efecto electroóptico longitudinal de la lámina mecánicamente libre de la sección Z de KDP nos dio el valor del coeficiente r_{63} igual a $30 \cdot 10^{-3}$ unid.CGSE. *Determinar el valor de este coeficiente* para el caso de utilizar esta lámina en el campo alternativo de alta frecuencia (suponiendo que la frecuencia del campo y el grosor de la lámina están elegidos de modo que la resonancia no aparece).

9.41. *¿Cuál de los coeficientes electroópticos del cuarzo* se puede determinar, utilizando la probeta orientada de la sección X y midiendo la magnitud de la tensión de mando $V_{\lambda/2}$ para la señal luminosa con la longitud de onda determinada, que se propaga en la dirección del eje óptico?

9.42. *El campo eléctrico* $\overline{E}$ *está* aplicado a las caras activas de la lámina de esfalerita orientadas perpendicularmente a la dirección de [111]. ¿Con qué coeficientes de refracción se caracterizan las propiedades ópticas de esta lámina? ¿Qué correlación caracteriza la magnitud de la duración del *retardo de fase de la señal luminosa polarizada a lo* largo de la dirección de [111] que se propaga en la dirección perpendicular a la de [111]?

9.43. Durante la investigación de las propiedades electroópticas de los cristales de KTN a la temperatura de $T = T_C - 30°$, para la luz con $\lambda = 0{,}633\ \mu$, fue medido el cambio del índice de refracción Δn en la dirección de [010] originado por la superposición del campo eléctrico a lo largo de [100]; en este caso, siendo la intensidad del campo igual a 10^4 V/cm, el cambio del índice de refracción Δn resultó ser de $6 \cdot 10^{-4}$. ¿Cuál de los coeficientes electroópticos de KTN se puede determinar, valiéndose de estos datos? ¿Cuál es su magnitud?

9.44. Dos probetas de dimensiones unitarias de los cristales de KDP y DKDP están colocadas en el campo eléctrico de modo que éste coincide con la dirección de [001], y la luz se propaga en la dirección de [110]. ¿Qué diferencia de potencial hay que aplicar en uno y en otro casos para que las dos láminas den la diferencia de recorridos de $\lambda/2$ para $\lambda = 0{,}535\ \mu$?

9.45. *) ¿Si es posible realizar la modulación de la luz, utilizando el efecto electroóptico cuadrático longitudinal en los cristales de perovskitas cúbicas, en las direcciones: a) [100], [010], b) [110]?

9.46.*) ¿Cómo cambia la indicatriz óptica de los cristales que pertenecen a las clases de 23 y $m3$ al superponer el campo eléctrico en las direcciones del tipo ⟨100⟩ debido al efecto electroóptico cuadrático?

9.47.*) ¿A lo largo de qué direcciones cristalográficas es necesario aplicar el campo eléctrico a los cristales de las singonías medias para que la simetría de sus indicatrices ópticas no baje debido al efecto electroóptico cuadrático?

9.48.*) ¿Cómo cambiarán las propiedades ópticas de las láminas de cuarzo de las secciones X y Z (fig. 2.3), al aplicar el campo eléctrico, el vector de intensidad del cual coincide con la dirección del grosor de las láminas, debido al efecto electroóptico cuadrático?

9.49.*) ¿Si es posible observar el efecto electroóptico longitudinal lineal y el cuadrático en los cristales de turmalina en la dirección de [0001]?

9.50.*) ¿Cómo cambiarán las propiedades ópticas de los cristales de la sal de roca y de la esfalerita, al superponer el campo eléctrico a lo largo de las direcciones del tipo ⟨100⟩

*) *Indicación*: Resolviendo los problemas 9.45—9.50, se recurrirá al principio de Curie y se tendrá en cuenta que el producto de $E_C E_i$ tiene la simetría de ∞/mm.

debido al: a) efecto electróptico lineal; b) efecto electróptico cuadrático?

9.51. Durante el estudio experimental del efecto electróptico cuadrático en los cristales no centrosimétricos es importante separarlo del lineal. Para esto es necesario hallar tales direcciones de la aplicación del campo y de la propagación de la luz que los cambios de la indicatriz óptica originados por el efecto lineal estén ausentes. ¿A lo largo de qué direcciones cristalográficas: [100], [010] o [001] se puede observar el efecto puro electróptico cuadrático longitudinal en los cristales de la clase 2?

9.52. La investigación del efecto electróptico cuadrático en los cristales de KDP se realizó en las probetas de las dimensiones de $1 \times 1 \times 1$ cm³. Los valores de las tensiones de mando necesarias para obtener la diferencia de recorridos de media onda para la luz con $\lambda = 0{,}540\ \mu$, que corresponden a las direcciones determinadas del campo y el paso de la luz se dan en la tabla 9.2.

Tabla 9.2

Dirección del campo	Dirección del paso de la luz	Tensión de mando $V_{\frac{\lambda}{2}}$ $\frac{kV}{cm}$
[100]	[010]	20
[010]	[001]	24,6

¿Cuáles de los coeficientes de R_{ij} (o de sus combinaciones) se puede calcular según estos datos? ¿Cuáles son sus valores?

9.53. Calcular la magnitud de la tensión de mando $V_{\lambda/2}$ del modulador de ADP de las dimensiones de $1 \times 1 \times 1$ cm³ que trabaja en el régimen del efecto electróptico cuadrático transversal (el campo está dirigido a lo largo de [110] y la luz, a largo de [001]) para la señal luminosa con $\lambda = 0{,}540\ \mu$. ¿Cuántas veces es mayor la tensión de mando del modulador indicado, que trabaja utilizando el efecto electróptico cuadrático, que la magnitud de la tensión de mando del modulador de ADP, que utiliza el efecto electróptico lineal longitudinal en la dirección de [001]?

9.54. El poder resolutivo N que caracteriza el número de los elementos de resolución luminosos es una de las características técnicas más importantes de los deflectores de emi-

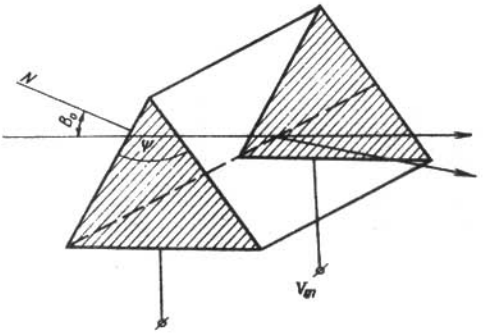


Fig. 9.8. Dibujo para el problema 9.54.

sión luminosa empleados en los sistemas de telecomunicación óptica. Determinar el poder resolutivo máximo del deflector con el prisma de desviación de niobato-tantalato de potasio (KTN), con la longitud de base de 1 cm, colocado en el campo eléctrico, con la intensidad de 10^4 V/cm (fig. 9.8), que trabaja en el intervalo de temperaturas de 20—30° C para la señal luminosa con $\lambda = 0{,}633$ μ.

Observación: El valor máximo de $N_{\text{máx}}$ se caracteriza por la correlación $N_{\text{máx}} = \frac{l}{\lambda}\Delta n$, donde l es la longitud de la base del prisma, λ es la longitud de la onda de la señal luminosa, Δn es el cambio del índice de refracción.

9.55. ¿Cuál de los coeficientes del efecto electroóptico cuadrático de los cristales de ADP se puede determinar según los resultados del experimento representado esquemáticamente en la fig. 9.9, si la magnitud $V_{\lambda/2}$ para la probeta de las dimensiones de $1 \times 1 \times 1$ cm³ fue de 52 kV.

9.56. Calcular la magnitud de la birrefringencia inducida por la superposición del campo eléctrico en la dirección de [010] para el caso de la propagación de la luz en la dirección de [100] para los cristales de triglicinsulfato (TGS): a) en la modificación paraeléctrica, b) en la modificación ferroeléctrica.

9.57. En los cristales de triglicinsulfato se observó el efecto electroóptico longitudinal en la dirección de [010]. Calcular la magnitud de la birrefringencia inducida por la superposición del campo.

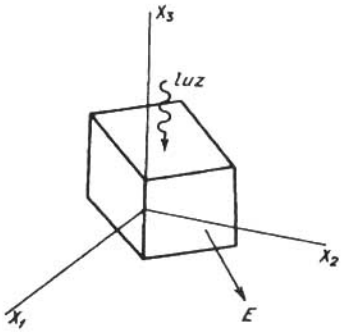


Fig. 9.9. Dibujo para el problema 9.55.

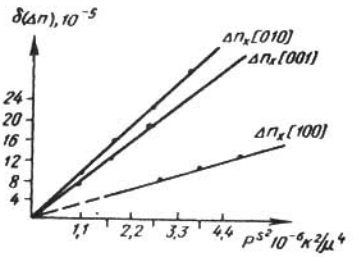


Fig. 9.10. Dibujo para el problema 9.60.

9.58. ¿Si es posible observar el efecto electroóptico cuadrático longitudinal en los cristales de simetría 422 en las direcciones de: [100], [010] y [001]?

9.59. En los sistemas más simples de exploración del rayo luminoso se utiliza el prisma de cristal electroóptico colocado en el campo eléctrico (fig. 9.8). Al cambiar el índice de refracción del prisma varía la dirección del rayo refractado. Calcular el cambio del coeficiente de refracción del prisma de titanato de bario que está colocado en el campo eléctrico de intensidad de 10^4 V/cm y se emplea para la desviación estática de la señal luminosa con $\lambda = 0{,}633\ \mu$ en el intervalo de temperaturas de 130—140° C.

9.60. En la fig. 9.10 están representadas las dependencias de la birrefringencia espontánea de los cristales de la sal de Seignette medida en las direcciones de [100], [010] y [001] en dependencia del cuadrado de la polarización espontánea ($\overline{P}^s \parallel [100]$). ¿Cuáles de los coeficientes del efecto electroóptico cuadrático (o de sus combinaciones) se puede determinar según estos datos? ¿Cuáles son sus valores?

§ 10. EFECTO PIEZORRESISTIVO (TENSORRESISTIVO) EN LOS CRISTALES SEMICONDUCTORES

El efecto piezorresistivo consiste en el cambio de la magnitud de la resistencia eléctrica específica del cristal debido a la acción en éste de las tensiones mecánicas. La mayor parte de los cristales posee este efecto en uno u otro grado. Es especialmente grande este efecto en los cristales semiconductores.

En ausencia de las tensiones mecánicas, la ley de Ohm para los cristales tiene la forma:

$$E_i = \rho_{ik} j_k, \tag{10.1}$$

donde E_i y j_k son, respectivamente, las componentes de los vectores de intensidad del campo eléctrico y de la densidad de la corriente; ρ_{ik} son las componentes del tensor de la resistencia específica en ausencia de las tensiones mecánicas.

Actuando en el cristal las tensiones mecánicas, la magnitud de su resistencia específica cambia y la ley de Ohm toma en este caso la forma:

$$E_i = (\rho_{ik} + \Delta\rho_{ik})\, j_k. \tag{10.2}$$

Al mismo tiempo, en el caso de ser pequeñas las tensiones la adición $[\Delta\rho_{ik}]$ al tensor de la resistencia específica depende linealmente de la tensión, es decir,

$$\Delta\rho_{ik} = P_{iklm} t_{lm}, \tag{10.3}$$

P_{iklm} son los coeficientes que forman el tensor de cuarto rango.

La correlación (10.2) toma ahora la forma:

$$E_i = (\rho_{ik} + \rho_{iklm} t_{lm})\, j_k. \tag{10.4}$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación (10.4) por el tensor de la electroconductibilidad específica, siendo la tensión de cero σ_{si}, y sumando por i, obtenemos

$$\sigma_{si} E_i = j_s + \Pi_{sklm} t_{lm} j_k. \tag{10.5}$$

Al comparar (10.4) y (10.5), tenemos

$$\Pi_{sklm} = \sigma_{si} P_{iklm}. \tag{10.6}$$

Los coeficientes P_{iklm} y Π_{sklm} que forman el tensor de cuarto rango se llaman coeficientes piezorresistivos.

Expresando en (10.5) las tensiones mediante las deformaciones, llegamos a la ecuación

$$\sigma_{si}E_i = j_s + m_{skpq}, \tag{10.7}$$

donde

$$m_{skpq} = \Pi_{skim} \cdot C_{impq}. \tag{10.8}$$

C_{impq} son los coeficientes de la rigidez elástica y m_{skpq} llevan el nombre de los coeficientes elastorresistivos.

Designaciones matriciales. Los tensores $[\Delta\rho_{ij}]$ y $[t_{ij}]$ son simétricos por los índices i y j. *Por eso, los coeficientes* piezorresistivos y elastorresistivos se pueden escribir en forma matricial más breve

$$\Pi_{ijkl}t_{kl} = \Pi_{\mu\nu}t_\mu,$$

de donde se deduce que

$\Pi_{ijkl} = \Pi_{\mu\nu}$, si μ y ν son iguales a 1, 2 y 3;

$\Pi_{ijkl} = 2\Pi_{\mu\nu}$, si el índice ν es igual a 4, 5 ó 6. (10.9)

Las correlaciones análogas tienen lugar también para los coeficientes m_{ijkl}:

$$m_{ijkl}r_{kl} = m_{\alpha\mu}r_\mu.$$

Los coeficientes Π y m están enlazados por medio de las siguientes correlaciones:

$$\Pi_{\lambda\mu} = m_{\lambda\nu}s_{\nu\mu}, \quad m_{\lambda\nu} = \Pi_{\lambda\mu}C_{\mu\nu}, \tag{10.10}$$

donde $s_{\nu\mu}$ son los coeficientes de la compresibilidad elástica.

La simetría del cristal y el número de los coeficientes piezorresistivos independientes. Debido a la simetría de los coeficientes $\Pi_{\mu\nu}$ y $m_{\mu\nu}$ por los índices μ y ν el número de los coeficientes independientes en el caso general es igual a 21. Teniendo en cuenta la simetría del cristal, este número disminuye.

La forma de las matrices de los coeficientes piezorresistivos para los cristales que pertenecen a diferentes clases cristalográficas y los valores de los coeficientes piezorresistivos de diferentes cristales semiconductores se dan en la tabla 11, *b*.

Efecto piezorresistivo en los cristales semiconductores de la simetría $m3m$ *y* $\bar{4}3m$. Para las aplicaciones prácticas del efecto piezorresistivo, el mayor interés lo ofrecen los cristales de las clases indicadas, incluidos el germanio y el sili-

cio que tienen una amplia esfera de utilización. En ausencia de las tensiones, la resistencia específica de tales semiconductores no depende de la dirección y la ley de Ohm tiene la forma escalar

$$\bar{E} = \rho \bar{j}.$$

Durante la acción de las tensiones mecánicas y las deformaciones de la red cristalina que surgen en este caso, la resistencia del cristal resulta ser desigual en diferentes direcciones. Aparecen las componentes transversales de la corriente y el vector de densidad de la corriente en este caso no es paralelo al vector $\bar{E}$. Puesto que para los cristales de las clases indicadas tres coeficientes piezorresistivos Π_{11}, Π_{12}, Π_{44}, son diferentes de cero, las ecuaciones (10.5) se sustituyen por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\sigma E_1 &= j_1 [1 + \Pi_{11} t_1 + \Pi_{12} (t_2 + t_3)] + \Pi_{44} (j_2 t_6 + j_3 t_5), \\
\sigma E_2 &= j_2 [1 + \Pi_{11} t_2 + \Pi_{12} (t_1 + t_3)] + \Pi_{44} (j_1 t_6 + j_3 t_4), \qquad (10.11) \\
\sigma E_3 &= j_3 [1 + \Pi_{11} t_3 + \Pi_{12} (t_1 + t_2)] + \Pi_{44} (j_1 t_5 + j_2 t_4).
\end{aligned}$$

Efectos piezorresistivos longitudinal, transversal y de deslizamiento. Supongamos que en el cristal que posee el efecto piezorresistivo actúa una tensión mecánica uniaxial.

Si las direcciones de la corriente y del campo eléctrico coinciden con la dirección en que actúa la tensión mecánica (fig. 10.1, *a*), el cambio de la resistencia del cristal en este caso se llama el efecto piezorresistivo longitudinal.

Pero si las direcciones de la corriente y del campo son perpendiculares a la dirección de la tensión mecánica (fig. 10.1, *b*), este efecto se llama transversal. Así, por ejemplo, para la tensión uniaxial que actúa a lo largo del eje X_1, el coeficiente Π_{11} describe el efecto longitudinal, los coeficientes Π_{12} y Π_{13}, los efectos transversales.

El cambio de la resistencia del cristal debido a la acción de las tensiones de deslizamiento se llama el efecto de deslizamiento. Los coeficientes de deslizamiento Π_{14}, Π_{24}, Π_{34} describen el cambio de la resistencia originado por la acción de la tensión de deslizamiento t_4 para el caso en que las direcciones del campo eléctrico y de la corriente coinciden; el coeficiente Π_{44} describe el cambio de la resistencia condicionado por la acción de la misma tensión t_4 en el caso en que el campo esté dirigido a lo largo del eje X_2 y la densidad de la corriente, a lo largo del eje X_3.

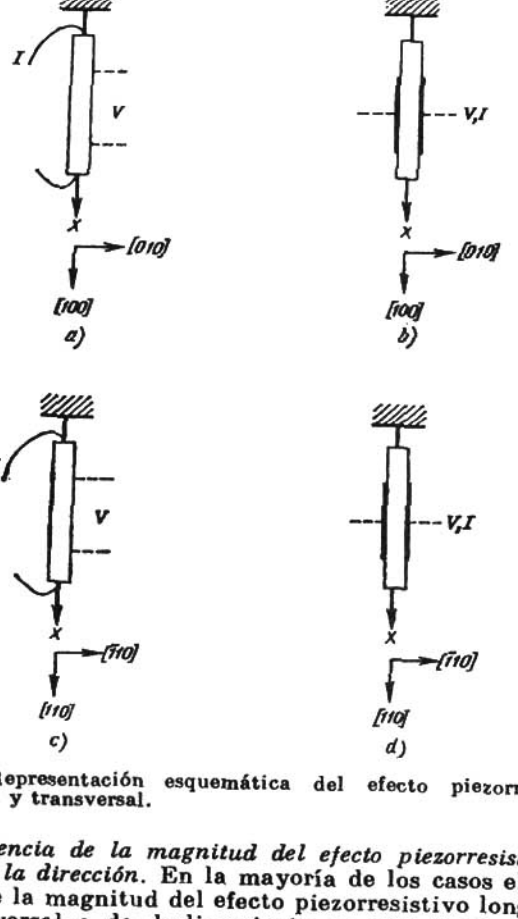


Fig. 10.1. Representación esquemática del efecto piezorresistivo longitudinal y transversal.

Dependencia de la magnitud del efecto piezorresistivo en función de la dirección. En la mayoría de los casos el valor máximo de la magnitud del efecto piezorresistivo longitudinal, transversal o de deslizamiento no está ligado con la dirección de los ejes cristalofísicos.

Para hallar el sistema de coordenadas $X_1'X_2'X_3'$, en que el efecto que nos interesa es extremo, es necesario utilizar la ley de transformación de los coeficientes piezorresistivos

que son las componentes del tensor de cuarto rango

$$\Pi'_{ijkl} = C_{im}C_{jn}C_{kp}C_{lg}\Pi_{mnpg} \qquad (10.12)$$

y realizar la investigación de extremo de esta expresión. Aquí C_{im}, C_{jn}, C_{kp}, C_{lg} son los cosenos directores que determinan la orientación de los ejes $X'_1X'_2X'_3$ respecto de los ejes cristalofísicos X_1, X_2, X_3 con los que están enlazados los coeficientes Π_{mnpg}.

Aplicación de los convertidores semiconductores a base del efecto piezorresistivo. El desarrollo de la técnica moderna impuso la necesidad de fomentar los métodos para medir las tensiones mecánicas y deformaciones que surgen en las construcciones bajo la acción de las fuerzas externas, de las aceleraciones lineales y angulares, de los momentos flectores, oscilaciones, vibraciones, etc.

La utilización de los cristales semiconductores abrió nuevos horizontes ante la tensometría.

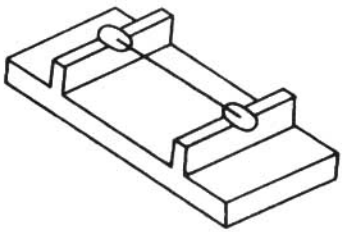
Grandes valores de los coeficientes piezorresistivos observados en los cristales semiconductores, ausencia de la dependencia entre estos coeficientes y la frecuencia, sensibilidad a la presión triaxial, estabilidad y reproductibilidad de las características, todo esto hizo utilizar en gran escala estos cristales en calidad de elementos sensibles (captadores tensométricos o tensocaptadores), aparatos destinados a medir las pequeñas fuerzas de desplazamiento, deformaciones, aceleraciones, etc.

Captadores que trabajan en el régimen del efecto piezorresistivo longitudinal. Los captadores monocristalinos de este tipo representan en sí barretas o varillas delgadas orientadas, cuya longitud coincide con la dirección del valor máximo del coeficiente piezorresistivo longitudinal para el cristal dado (fig. 10.2). Supongamos que la probeta, cuya longitud coincide con la dirección $\bar{n}$, está sometida a la acción de las tensiones mecánicas. En este caso,

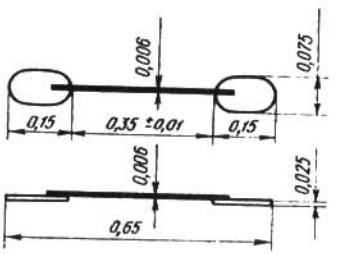
$$E_{\bar{n}/\rho} = j_{\bar{n}}(1 + \Pi_{\bar{n}}t). \qquad (10.13)$$

Por cuanto $E_{\bar{n}/\rho} = \rho + \Delta\rho$, entonces $\Delta\rho/\rho = \Pi_{\bar{n}}t$, (10.14)

donde $\Pi_{\bar{n}}$ es el valor del coeficiente piezorresistivo longitudinal en la dirección de $\bar{n}$, de (10.14) se desprende que el coeficiente $\Pi_{\bar{n}}$ se puede llamar el coeficiente de la sensibilidad de tensión ($\Pi_{\bar{n}} = \Delta\rho/\rho t$).



a)



b)

Fig. 10.2. Captador tensométrico semiconductor que trabaja en el régimen del efecto longitudinal (*a*) y sus dimensiones (*b*).

Una de las características más importantes de los captadores en cuestión es el coeficiente de tensosensibilidad K definido del modo siguiente:

$$K = \frac{\Delta R}{Rr}, \quad (10.15)$$

donde $\frac{\Delta R}{R}$ y r son, respectivamente, el cambio de la resistencia y la deformación en la dirección de la longitud del captador.

De (10.15) se desprende que el coeficiente K caracteriza la sensibilidad del captador a la deformación.

Teniendo en cuenta la ley de Hooke, resulta que

$$K = \frac{\Delta R}{Rt_{\overline{n}} S_{\overline{n}}} = \Pi_{\overline{n}} E_{\overline{n}}, \quad (10.15a)$$

donde $t_{\overline{n}}$ es la tensión que actúa en la dirección de la longitud del captador; $S_{\overline{n}}$ y $E_{\overline{n}}$ son, respectivamente, los valores del coeficiente de los módulos elásticos y del módulo de Young en la dirección de la longitud del captador.

En este caso

$$S_{\overline{n}} = \left(S_{11} - 2S_{11} - S_{12} + \frac{1}{2} S_{44}\right)(n_1^2 n_2^2 + n_2^2 n_3^2 + n_3^2 n_1^2). \quad (10.16)$$

Captadores a base de la utilización del efecto transversal y de deslizamiento. Debido a que para los cristales semiconductores el coeficiente $\Pi_{44} \neq 0$, éstos se pueden utilizar para medir las tensiones de deslizamiento y los momentos torsores.

Si en el semiconductor monocristalino actúa la tensión de deslizamiento t_4, la corriente se deja pasar en la dirección de X_2 y la intensidad del campo eléctrico se mide en la di-

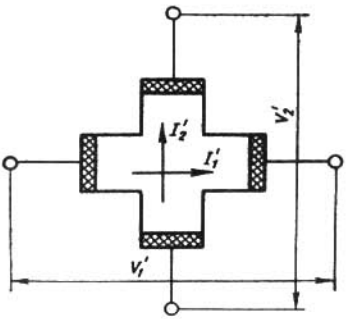


Fig. 10.3. Captador tensométrico para medir la suma de las tensiones en el plano.

rección del eje X_3, entonces la última ecuación de las (10.11) se convierte en la ecuación del tipo:

$$\frac{E_3}{\rho} = \Pi_{44} I_2 t_4. \qquad (10.17)$$

En el principio de utilización del efecto transversal y de deslizamiento se basan los captadores con que se puede determinar las deformaciones que experimenta la superficie libre. El esquema de tal captador está representado en la fig. 10.3. Para determinar plenamente las deformaciones es necesario hacer tres mediciones: medir la resistencia en dos direcciones perpendiculares (por ejemplo, a lo largo de X_1' y X_2') a la condición de que en las direcciones transversales no hay corriente, y, digamos, la magnitud V_2'/I_1', siendo $I_2' = 0$. Es evidente que según los resultados de estas tres mediciones se puede determinar las deformaciones en dos direcciones perpendiculares y la deformación de deslizamiento en el plano tangente a la superficie.

Ejemplos de solución de los problemas

10.1. Para medir las deformaciones relativas que experimentan diferentes construcciones suelen utilizar los captadores a germanio o a silicio que consisten en delgadas varillas orientadas y trabajan en el régimen del efecto piezorresistivo longitudinal. ¿Qué expresión determina la magnitud del

efecto piezorresistivo longitudinal de los captadores mencionados de orientación arbitraria? ¿Cómo hay que orientar las varillas de los captadores a germanio del tipo p y n y de los captadores a silicio del tipo n *para obtener el efecto* longitudinal máximo?

Solución. Supongamos que $\bar{n}$ $(n_1,\ n_2,\ n_3)$ es la dirección del captador.

Hagamos coincidir el eje X_1' con la dirección de $\bar{n}$, en este caso, según (10.12), el efecto piezorresistivo longitudinal se describirá por el coeficiente

$$\Pi_{\bar{n}} = \Pi_{11}' = \Pi_{1111}' = n_i n_j n_k n_l \Pi_{ijkl}.$$

Colocando en esta expresión los coeficientes de Π_{ijkl}, diferentes de cero, para la clase $m3m$ a que pertenecen los cristales de germanio y silicio, obtenemos:

$$\Pi_{11}' = (n_1^4 + n_2^4 + n_3^4)\,\Pi_{11} + 2\,(\Pi_{12} + \Pi_{44})\,(n_1^2 n_2^2 + n_3^2 n_1^2 + n_2^2 n_3^2),$$

donde

$$\Pi_{44} = 2\Pi_{2323} = 2\Pi_{3131} = 2\Pi_{1212}.$$

Elevando la expresión $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ *al cuadrado*, obtenemos:

$$n_1^4 + n_2^4 + n_3^4 = 1 - 2\,(n_1^2 n_2^2 + n_3^2 n_1^2 + n_2^2 n_3^2).$$

Después de esto la expresión para Π_{11}' toma la forma:

$$\Pi_{11}' = \Pi_{11} - 2\,(\Pi_{11} - \Pi_{12} - \Pi_{44})\,(n_1^2 n_2^2 + n_3^2 n_1^2 + n_3^2 n_2^2) =$$
$$= \Pi_{11} - 2\Pi_A\,(n_1^2 n_2^2 + n_3^2 n_1^2 + n_2^2 n_3^2),$$

donde

$$\Pi_A = \Pi_{11} - \Pi_{12} - \Pi_{44}.$$

Para hallar el límite del cambio de la magnitud Π_{11}' es suficiente encontrar el límite del cambio de la magnitud $(n_1^2 n_2^2 + n_3^2 n_1^2 + n_3^2 n_2^2)$ que *cambia de 0 a 1/3. Por lo tanto*, Π_{11}' cambia de Π_{11} a $\Pi_{11} - \frac{2}{3}\Pi_A$. A la magnitud extrema de $\Pi_{11}' = \Pi_{11}$ le corresponden las direcciones de [100], [010] y [001]; al valor extremo de $\Pi_{11}' = \Pi_{11} - \frac{2}{3}\Pi_A$ le corresponden ocho direcciones del tipo [111].

Es evidente que los valores máximos y mínimos de Π_{11}' dependen del signo de las magnitudes Π_{11} y Π_A.

No es difícil notar que las magnitudes máximas del coeficiente Π'_{11} para los captadores a germanio del tipo p y n corresponden a las direcciones del tipo [111], para los captadores a silicio del tipo n, a las direcciones del tipo [100].

De este modo, es necesario orientar los captadores a germanio del tipo n y p a lo largo de las direcciones de [111] y los captadores a silicio del tipo n, a lo largo de [100].

10.2. ¿Cómo cambiará la resistencia del tensocaptador filiforme a silicio del tipo n de las dimensiones de $6 \times 1 \times 1$ mm³ orientado en la dirección de [100] que trabaja en el régimen del efecto longitudinal, siendo la deformación de 0,05%:

a) a costa del cambio de la resistencia específica;

b) a costa del cambio de sus dimensiones geométricas?

Determinar el coeficiente de tensosensibilidad y la señal de salida recibida durante la deformación de 0,05%, si la corriente continua que circula a través del captador es de 5 mA.

Solución. a) Para el tensocaptador semiconductor que representa en sí una varilla delgada orientada en la dirección de [100], todas las tensiones, a excepción de la tensión longitudinal t_1, son iguales a cero. Las deformaciones que corresponden a esta tensión son:

$$r_1 = S_{11}t_1; \quad r_2 = S_{21}t_1; \quad r_3 = S_{31}t_1.$$

Puesto que el captador se utiliza en el régimen del efecto longitudinal, entonces

$$j_2 = j_3 = 0; \quad E_2 = E_3 = 0$$

y según (10.11),

$$E_{1/\rho} = j_1 (1 + \Pi_{11}t_1) = j_1 \left(1 + \frac{\Pi_{11} \cdot r_1}{S_{11}}\right).$$

El cambio relativo de la resistencia específica del captador es

$$\Delta\rho/\rho = \Pi_{11}t_1 = \frac{\Pi_{11}}{S_{11}} \cdot r_1.$$

Para el tipo n del silicio $\rho = 11{,}7$ ohm·cm,

$$\Pi_{11} = -102{,}2 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^2/\text{din},$$

$$S_{11} = 0{,}768 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^2/\text{din},$$

y en el caso de la deformación relativa: $r_1 = 5 \cdot 10^{-4}$,

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta\rho}{\rho} = -665 \cdot 10^{-3} = -0{,}665.$$

b) El cambio relativo de la resistencia del tensocaptador debido al cambio de sus dimensiones es:

$$\frac{\Delta R}{R} = 1 - \frac{S_{21}+S_{31}}{S_{11}} r_1 = \left(1 - \frac{2S_{12}}{S_{11}}\right) r_1.$$

El primer término entre paréntesis aparece como consecuencia del aumento de la longitud de la probeta, el término $\frac{-S_{21}+S_{31}}{S_{11}}$ aparece debido al cambio del área de la sección transversal,

$$\frac{\Delta R}{R} = \left(1 + \frac{0{,}428}{0{,}768}\right) \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 0{,}008.$$

El cambio de la resistencia total del tensocaptador filiforme, orientado a lo largo de [100], es:

$$\Delta R/R = \left(1 - \frac{2S_{12}}{S_{11}} + \Pi_{11}\right) r_1 = \left(1 + 2\nu + \frac{\Pi_{11}}{S_{11}}\right) r_1,$$

donde ν es el coeficiente de Poisson.

Como se deduce del resultado del cálculo para los tensocaptadores de silicio delgados, el cambio de la resistencia del captador es condicionado, en lo fundamental, (en el caso dado en el 99%) por el cambio de su resistencia específica. Este resultado es justo también para los demás tensocaptadores semiconductores de este tipo.

El coeficiente de la tensosensibilidad del tensocaptador es:

$$K = \frac{\Delta R}{Rr} = 1 + 2\nu + \Pi_{11} + \frac{1}{S_{11}} \approx \Pi_{11} \cdot 1/S_{11} \approx -133.$$

La señal de salida durante la deformación de $5 \cdot 10^{-4}$ es:

$$|V| = I\Delta R = IR\frac{\Delta\rho}{\rho} = I\rho\frac{l}{S}\frac{\Pi_{11}}{S_{11}} r_1 \approx 2{,}3 \text{ V}.$$

10.3. Hallar la expresión que permita calcular la magnitud del efecto piezorresistivo transversal en los cristales semiconductores pertenecientes a las clases $m3m$ y $\bar{4}3m$ en la dirección arbitraria. Determinar los valores extremos del coeficiente del efecto piezorresistivo transversal y las direcciones extremas que les corresponden.

Solución. El efecto piezorresistivo transversal se describe por los coeficientes Π_{ij}, donde $i \neq j$; $i, j = 1, 2, 3$.

Si la tensión mecánica actúa a lo largo del eje X_2 y los vectores de la densidad de corriente y del campo están diri-

gidos por el eje X_1, tal efecto se describe por el coeficiente Π_{12}.

Examinemos el caso en que la tensión mecánica uniaxial actúa en la dirección de $\bar{n}$ $(n_1, n_2, n_3) \parallel X_1'$ y la corriente y el campo tienen la dirección: $\bar{l}$ $(l_1, l_2, l_3) \parallel X_1'$.

Entonces

$$\Pi_{12}' = \Pi_{1122}' = l_i l_j n_k n_l \Pi_{ijkl} = \Pi_{11}(n_1^2 l_1^2 + n_2^2 l_2^2 + n_3^2 l_3^2) + \\ + \Pi_{12}(n_1^2 l_2^2 + n_2^2 l_1^2 + n_1^2 l_3^2 + n_3^2 l_1^2 + n_2^2 l_3^2 + n_3^2 l_2^2) + \\ + 2\Pi_{44}(n_2 n_3 l_2 l_3 + n_1 n_3 l_1 l_3 + n_1 n_2 l_1 l_2).$$

Para simplificar la expresión para Π_{12}' utilicemos la condición de ortogonalidad de los vectores $\bar{n}$ y $\bar{l}$ elevada al cuadrado:

$$(n_1 l_1 + n_2 l_2 + n_3 l_3)^2 = 0 \quad \text{o} \quad n_1^2 l_1^2 + n_2^2 l_2^2 + n_3^2 l_3^2 + \\ + 2(n_1 n_2 l_1 l_2 + n_1 n_3 l_1 l_3 + n_2 n_3 l_2 l_3) = 0$$

y el hecho de que los vectores $\bar{n}$ y $\bar{l}$ son unitarios:

$$(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) = 1.$$

Teniendo en cuenta estas correlaciones, obtenemos la siguiente expresión para Π_{12}':

$$\Pi_{12}' = \Pi_{12} + \Pi_A (n_1^2 l_1^2 + n_2^2 l_2^2 + n_3^2 l_3^2),$$

donde

$$\Pi_A = \Pi_{11} - \Pi_{12} - \Pi_{44}.$$

Los valores extremos de Π_{12}' se determinan por la magnitud de $n_1^2 l_1^2 + n_2^2 l_2^2 + n_3^2 l_3^2$, el valor mínimo de la cual es, evidentemente, igual a cero. Esto corresponde a las siguientes direcciones de $\bar{n}$ y $\bar{l}$:

$\bar{n}$	$\bar{l}$		$\bar{n}$	$\bar{l}$
(1, 0, 0)	(0, l_2, l_3)		(0, n_2, n_3)	(1, 0, 0)
(0, 1, 0)	(l_1, 0, l_3)	o	(n_1, 0, n_3)	(0, 1, 0)
(0, 0, 1)	(l_1, l_2, 0)		(n_1, n_2, 0)	(0, 0, 1).

Para hallar el valor máximo de la magnitud $n_1^2 l_1^2 + n_2^2 l_2^2 + n_3^2 l_3^2$ utilicemos el método de los factores indefinidos de Lagrange. Compongamos la magnitud f:

$$f = (n_1^2 l_1^2 + n_2^2 l_2^2 + n_3^2 l_3^2) - \lambda_1 (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 1) - \\ - \lambda_2 (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 - 1) - \lambda (n_1 l_1 + n_2 l_2 + n_3 l_3).$$

Diferenciando f por n_i y l_i e igualando las derivadas al cero, obtenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial n_i} = 2n_i l_i^2 - 2\lambda_1 n_i - \lambda l_i = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial l_i} = 2l_i n_i^2 - 2\lambda_2 l_i - \lambda n_i = 0.$$

Multiplicando $\frac{\partial f}{\partial n_i}$ por n_i, $\frac{\partial f}{\partial l_i}$ por l_i y comparando las expresiones obtenidas, hallamos que $n_i^2 = l_i^2$ o $n_i = \pm l_i$. La expresión $n_1 l_1 + n_2 l_2 + n_3 l_3 = 0$ ahora toma la forma:

$$\pm n_1^2 \pm n_2^2 \pm n_3^2 = 0.$$

La elección de todos los signos positivos o negativos de n_1, n_2, n_3 no satisface a la condición de la normalización del vector $\bar{n}$. Examinemos cualquiera de las seis combinaciones restantes de signos, por ejemplo, $n_1^2 - n_2^2 + n_3^2 = 0$. Restando esta igualdad de la condición de la normalización del vector $\bar{n}$, obtenemos:

$$n_2^2 = \frac{1}{2}; \quad n_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

En este caso

$$\bar{n} = \left(n_1; \quad \pm \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad n_3\right); \quad \bar{l}\left(n_1; \quad \pm \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad n_3\right);$$

$$n_1^2 + n_3^2 = \frac{1}{2} \qquad 168$$

y la magnitud $n_1^2 l_1^2 + n_2^2 l_2^2 + n_3^2 l_3^2 = n_1^4 + \frac{1}{4} + n_3^4$.

Teniendo en cuenta la condición de $n_1^2 + n_3^2 = \frac{1}{2}$, hallamos que el valor máximo de la magnitud que nos interesa corresponde a las direcciones del tipo

$$\bar{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 0\right), \quad \bar{l}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 0\right),$$

(en total son seis tales direcciones) y es igual a $\frac{1}{2}$.

De este modo, el coeficiente del efecto piezorresistivo transversal cambia de Π_{12} hasta $\Pi_{12} + \frac{1}{2}(\Pi_{11} - \Pi_{12} - \Pi_{44})$, y sus valores máximo y mínimo dependen del signo $(\Pi_{11} - \Pi_{12} - \Pi_{44})$.

10.4. Para determinar los coeficientes piezorresistivos de los monocristales del telururo de plomo de conductibilidad del tipo p (p-PbTe) fueron preparadas las probetas con la sección de 10^{-2} cm^2. La orientación de las probetas y el esquema del experimento se dan en la fig. 10.1. Al comprimir las probetas con el esfuerzo de 1 kg, la magnitud de la resistencia específica de la primera (fig. 10.1,*a*), de la segunda (fig. 10.1,*b*) y de la tercera (fig. 10.1,*c*) probetas, medida a la corriente constante, disminuyó el 0,24%, 0,15% y 1,27%, respectivamente. Calcular los valores de los coeficientes piezorresistivos de los cristales de p-PbTe.

Solución. Según demuestra la fig. 10.1, en el caso de la primera y de la tercera probetas se utiliza el efecto longitudinal (las direcciones del campo y de la corriente coinciden con la dirección de la tensión mecánica), en el caso de la segunda probeta se utiliza el efecto transversal (las direcciones del campo y de la corriente son perpendiculares a la dirección de la tensión).

Los cristales del telururo de plomo pertenecen a la clase $m3m$, por eso, sus propiedades piezorresistivas se describen con los tres coeficientes independientes Π_{11}, Π_{12}, Π_{44} y la resistencia específica es la magnitud escalar.

Para la primera probeta (véase la fig. 10.1,*a*),

$$t_1 = -t;\ t_2 = t_3 = 0;\ j_1 = j;\ j_2 = j_3 = 0;$$
$$E_1 = E;\ E_2 = E_3 = 0$$

y la ecuación del efecto piezorresistivo (10.5) se escribe así:

$$\sigma E_1 = j_1 (1 + \Pi_{11} t_1)$$

o

$$E_1/j_1 = \rho (1 + \Pi_{11} t_1) = \rho + \Delta\rho; \quad \frac{\Delta\rho}{\rho} = \Pi_{11} t_1.$$

De ahí,

$$\Pi_{11} = \frac{(-\Delta\rho/\rho)}{-t} = \frac{(-\Delta\rho/\rho)}{(-F/S)} = \frac{24 \cdot 10^{-4}}{10^6 \cdot 10^2} = 24 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^2/\text{din}.$$

Para la segunda probeta (véase la fig. 10.1,*b*)

$$t_1 = -t,\ t_2 = t_3 = 0,$$
$$j_2 = j,\ j_1 = j_3 = 0,\ E_2 = E,\ E_1 = E_3 = 0,$$

y la ecuación (10.5) toma la forma:

$$\frac{E_2}{j_2} = \rho\,(1 + \Pi_{12} t_1) \quad \frac{\Delta\rho}{\rho} = \Pi_{12} t_1;$$

$$\Pi_{12} = \frac{-\Delta\rho/\rho}{-t} = 15 \cdot 10^{-12}\ \text{cm}^2/\text{din}.$$

Para la tercera probeta (véase la fig. 10.1,*c*) la ecuación (10.5) se puede escribir:

$$\frac{E_l}{j_l} = \rho\,(1 + \Pi_l t_l),$$

donde l es la dirección de la longitud de la probeta planteada por los cosenos directores $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$.

En este caso según (10.12):

$$\Pi_l = \frac{1}{2}\,(\Pi_{12} + \Pi_{12} + \Pi_{44}),$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Pi_{11} + \Pi_{12} + \Pi_{44}}{t},$$

$$\Pi_{11} + \Pi_{12} + \Pi_{44} = 2\,\frac{(-\Delta\rho/\rho)}{(-t)} = = 254 \cdot 10^{-12}\ \text{cm}^2/\text{din}.$$

De ahí

$$\Pi_{44} = 215 \cdot 10^{-12}\ \text{cm}^2/\text{din}.$$

10.5. Para medir las tensiones de deslizamiento y los momentos torsores se pueden utilizar los captadores semiconductores que trabajan en el régimen del efecto piezorresistivo de deslizamiento. Hallar la expresión que permita calcular la magnitud de este efecto para los cristales semiconductores de las clases $m3m$, $\bar{4}3m$, en la dirección arbitraria. Determinar los valores extremos de esta magnitud y las direcciones que corresponden a sus valores extremos.

Solución. El efecto piezorresistivo de deslizamiento se describe por las constantes del tipo

$$\Pi_{ij}\ (i = 1,\ 2,\ 3; \quad j = 4,\ 5,\ 6)$$

y por las constantes del tipo Π_{ij} $(i,\ j = 4,\ 5,\ 6)$.

Si las direcciones del campo eléctrico y de la corriente coinciden, la tensión de deslizamiento, por ejemplo t_4, influye en la resistencia del semiconductor a través de los coeficientes Π_{14}, Π_{24}, Π_{34}. De otra parte, la misma tensión de deslizamiento t_4 influye en la relación del campo dirigido

a lo largo del eje X_2 a la densidad de corriente dirigida por el eje X_3 por medio del coeficiente Π_{44}.

Puesto que para los cristales semiconductores de las clases $m3m$, $\bar{4}3m$ todos los coeficientes del primer tipo (Π_{14}, Π_{24}, Π_{34}) son iguales a cero, el efecto piezorresistivo en estos cristales se determina por los coeficientes diferentes de cero e iguales a

$$\Pi_{44} = \Pi_{55} = \Pi_{66}.$$

De este modo, la magnitud del efecto piezorresistivo de deslizamiento en los cristales de las clases mencionadas en la dirección arbitraria se determina por el valor del coeficiente Π'_{44} a lo largo de esta dirección.

Examinemos el caso en que la tensión mecánica de deslizamiento t'_4 (t'_{23} y t'_{32}) se determina por las direcciones de $X'_2 \parallel \bar{n}$ (n_1, n_2, n_3) y $X'_3 \parallel \bar{l}$ (l_1, l_2, l_3), la intensidad del campo está dirigida por el eje X_3, la densidad de la corriente, por el eje X'_3. Entonces

$$\frac{\Pi'_{44}}{2} = \Pi'_{2323} = n_i l_i n_k l_k \Pi_{ijkl} =$$

$$= \Pi_{2323}(n_2^2 l_3^2 + n_3^2 l_2^2 + n_3^2 l_1^2 + n_1^2 l_3^2 + n_1^2 l_2^2 + n_2^2 l_1^2) +$$

$$+ 2\Pi_{2323}(n_2 n_3 l_2 l_3 + n_3 n_1 l_3 l_1 + n_1 n_2 l_1 l_2) +$$

$$+ \Pi_{1111}(n_1^2 l_1^2 + n_2^2 l_2^2 + n_3^2 l_3^2) - 2\Pi_{1122}(n_1^2 n_2^2 + l_1^2 l_2^2 + n_3^2 l_3^2) -$$

$$- \Pi_{2323}(n_1^2 l_1^2 + n_2^2 l_2^2 + n_3^2 l_3^2) =$$

$$= \Pi_{2323} + \Pi_{1111} - 2\Pi_{2323} - \Pi_{1122})(n_1^2 l_1^2 + n_2^2 l_2^2 + n_3^2 l_3^2) =$$

$$= \frac{\Pi_{44}}{2} + \Pi_A (n_1^2 l_1^2 + n_2^2 l_2^2 + n_3^2 l_3^2),$$

$$\Pi'_{44} = \Pi_{44} + 2\Pi_A (n_1^2 l_1^2 + n_2^2 l_2^2 + n_3^2 l_3^2).$$

Hallando los valores extremos del coeficiente Π'_{44} (véase el problema 10.3), obtenemos que el primer valor extremo igual a Π_{44} corresponde a los valores de $\bar{n}$ del tipo (100) y a los valores de $\bar{l}$ del tipo (0, l_2, l_3), también, a los valores de $\bar{l}$ del tipo (100) y a los valores de $\bar{n}$ del tipo (0, n_2, n_3).

El segundo valor extremo del coeficiente Π'_{44} que es $\Pi_{44} + \Pi_A = \Pi_{11} - \Pi_{12}$, corresponde a las direcciones de $\bar{n}$ del tipo $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ y a las direcciones de $\bar{l}$ del tipo $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$. De este modo, los coeficientes Π'_{44} según la direc-

ción de la aplicación de la tensión de deslizamiento cambian dentro de los límites desde Π_{44} hasta $\Pi_{11} - \Pi_{12}$, y los valores mínimo y máximo de Π'_{44} para distintos cristales dependen del valor y de los signos de los coeficientes piezorresistivos.

10.6. Ultimamente tiene amplia difusión el método de fabricación de los tensocaptadores semiconductores, utilizando la cinta de dendrita de germanio estirada en cebos especiales en la dirección de [211]. La ventaja principal de dicho método es la sencillez del proceso tecnológico que consiste en cortar la cinta en elementos y conectar cables a ellos. Calcular el coeficiente de sensibilidad de los tensocaptadores preparados de la cinta de dendrita de germanio con la conductibilidad del tipo n, que trabajan en el régimen del efecto piezorresistivo longitudinal y tienen por objeto: a) medir las deformaciones, b) medir las tensiones y comparar su sensibilidad con la de los semejantes tensocaptadores cortados en la dirección de [111].

Solución. a) El coeficiente de la tensosensibilidad del tensocaptador que sirve para medir las deformaciones en el régimen del efecto piezorresistivo longitudinal, se determina como

$$K = \frac{\Delta R}{Rr} = \Pi_l E_l,$$

donde Π_l y E_l son, respectivamente, los valores del coeficiente piezorresistivo y del módulo de Young en la dirección de la longitud del tensocaptador.

Para el tensocaptador de la cinta de dendrita $\bar{l} \parallel [211]$

$$\left(l_1 = \frac{2}{\sqrt{6}}, \quad l_2 = l_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\right),$$

y las magnitudes Π_l y E_l se hallan, respectivamente, de las correlaciones (10.12) y (10.16):

$$\Pi_l = \Pi_{[211]} = \Pi_{11} + \frac{1}{2}(\Pi_{44} + \Pi_{12} - \Pi_{11}) =$$

$$= -73{,}8 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^2/\text{din},$$

$$E_l = E_{[211]} = \frac{1}{s_{11} - \frac{1}{2}\left(s_{11} - s_{12} - \frac{1}{2}s_{44}\right)} = 1{,}37 \cdot 10^{12} \text{ din/cm}^2,$$

$$K = \Pi_{[211]} \cdot E_{[211]} = -101.$$

b) El coeficiente de la sensibilidad del tensocaptador destinado a medir la tensión es igual a la magnitud del coeficiente piezorresistivo a lo largo del eje del captador, es decir,

$$\Pi_{[211]} = -73{,}8 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^2/\text{din}.$$

Para el captador a germanio del tipo n cortado en la dirección de [111]:

$$\Pi_{[111]} = \frac{1}{3}\Pi_{11} + \frac{2}{3}(\Pi_{12} - \Pi_{44}) = -96{,}84 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^2/\text{din}.$$

En este caso el coeficiente de la tensosensibilidad del captador de la deformación $K = \Pi_{[111]} \cdot E_{[111]} = -151$.

Comparando estos coeficientes, obtenemos que los coeficientes de la sensibilidad de los captadores de las tensiones y deformaciones, de cinta de dendrita de germanio, del tipo n son menores, respectivamente, 1,3 y 1,75 veces que la sensibilidad de los captadores cortados en la dirección de [111].

10.7. ¿Cómo cambiará la resistencia de la probeta cristalina del antimoniuro de indio sometida a la acción de la presión hidrostática de 100 at?

Solución. El tensor de las tensiones para la compresión triaxial se puede representar en la forma: $t_{km} = -P\delta_{km}$, y la ecuación (10.5) en este caso se escribirá:

$$\sigma_{ls} E_s = j_l - \Pi_{ljss} \cdot P j_l.$$

Para el antimoniuro de indio (la clase de simetría $\bar{4}3m$) $\sigma_{ls} = \sigma\delta_{ls}$ y la magnitud Π_{ljss} es igual a cero para $i \neq j$, de aquí

$$\sigma\bar{E} = \bar{j}[1 - P(\Pi_{11} + \Pi_{12} + \Pi_{13})] = \bar{j}[1 - P(\Pi_{11} + 2\Pi_{12})],$$

$$\bar{E} = \bar{j}[\rho - \rho P(\Pi_{11} + 2\Pi_{12})] = j(\rho - \Delta\rho).$$

Por lo tanto,

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = -P(\Pi_{11} + 2\Pi_{12}).$$

Colocando en la última correlación los valores de los coeficientes Π_{11} y Π_{12} y el valor de P, igual a 100 kg/cm², obtenemos:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = 10^2 \cdot 10^6 \cdot 300 \cdot 10^{-12} = 0{,}03 = 3\%.$$

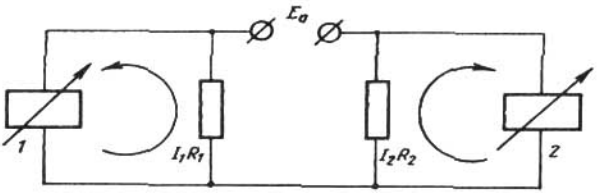


Fig. 10.4. Dibujo para el problema 10.8.

10.8. Para medir la deformación longitudinal que experimentan los elementos de las construcciones del avión se utilizó el captador de silicio del tipo p con las dimensiones de $6 \times 0{,}5 \times 1$ mm³ orientado en la dirección de [111], intercalado en el circuito eléctrico, que asegura la corriente continua en aquél de 0,02 A y la contratensión a través del captador pasivo (fig. 10.4). ¿A qué deformación fue sometido el elemento ensayado de la construcción, si la señal de salida fue de 0,68 V?

Solución. Si en el proceso de medición se utiliza el esquema representado en la fig. 10.4, *en este caso, en ausencia* de la deformación del captador activo se cumple la condición

$$I_1R_1 = I_2R_2, \quad \text{es decir, } V_{sal} = 0.$$

Durante la deformación del captador activo, su resistencia cambia en la magnitud ΔR_1 y en este caso

$$V_{sal} = I_1(R_1 + \Delta R_1) - I_2R_2 = I_1(R_1 + \Delta R_1) - I_1R_1 = I_1\Delta R_1.$$

De este modo, la señal obtenida durante la deformación del captador es directamente proporcional a la magnitud del cambio de su resistencia. Según (10.15),

$$\Delta R_1 = R \cdot r \cdot K_{[111]} = \rho \frac{l}{s} r\Pi_{[111]} \cdot E_{[111]}.$$

De ahí,

$$r = \frac{V_{sal}}{I\rho \frac{1}{s} \Pi_{[111]} \cdot E_{[111]}}.$$

Las magnitudes del coeficiente piezorresistivo y del módulo de Young en la dirección de [111] se hallan, respectivamente, de las correlaciones (10.12) y (10.16) y para el silicio del

tipo p son:

$$\Pi_{[111]} = 93{,}53 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^2/\text{din},$$
$$E_{[111]} = 1{,}88 \cdot 10^{-12} \text{ din/cm}^2,$$

de ahí,

$$r = 2{,}06 \cdot 10^{-4}.$$

10.9. El tensómetro de germanio, con la conductibilidad del tipo n, para medir la suma de las tensiones principales en el plano, está representado en la fig. 10.5.

El plano del captador está orientado por (111) y la corriente se deja pasar en la dirección de [111] que es perpendicular al plano. ¿Qué valor tendrán las tensiones medidas, si el cambio relativo de la resistencia del captador es de 0,12%?

Solución. Si la corriente y la intensidad del campo eléctrico en el captador tienen la dirección de $\bar{n}$, el cambio de la resistencia del captador originado por la acción de las tensiones $[t_{kl}]$ se determina mediante la correlación:

$$\frac{\Delta R}{R} = n_i n_j \Pi_{ijkl} t_{kl}.$$

Para nuestro caso

$$\bar{n}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{3} t_{kl} (\Pi_{11kl} + \Pi_{22kl} + \Pi_{33kl} + 2\Pi_{12kl} + 2\Pi_{23kl} + 2\Pi_{31kl}) =$$
$$= \frac{1}{3} \Pi_{11} (t_1 + t_2 + t_3) + \frac{2}{3} \Pi_{12} (t_1 + t_2 + t_3) +$$
$$+ \frac{2}{3} \Pi_{44} (t_4 + t_5 + t_6).$$

Puesto que las tensiones están en el plano de la lámina, entonces $t_{ik} n_k = 0$. Por consiguiente, $t_{i1} + t_{i2} + t_{i3} = 0$,

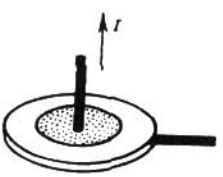


Fig. 10.5. Dibujo para el problema 10.9.

es decir,

$$\begin{aligned} t_{12}+t_{13} &= -t_{11} \\ t_{21}+t_{23} &= -t_{22} \\ t_{31}+t_{32} &= -t_{33} \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{aligned} t_6+t_5 &= -t_1 \\ t_6+t_4 &= -t_2 \\ t_5+t_4 &= -t_3, \end{aligned}$$

de donde

$$2(t_6+t_5+t_4) = -(t_1+t_2+t_3).$$

Colocando el valor de $t_4 + t_5 + t_6$ en la expresión para $\frac{\Delta R}{R}$, obtenemos:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{3}(\Pi_{11}+2\Pi_{12}-\Pi_{44})(t_1+t_2+t_3).$$

Designemos las tensiones principales que actúan en el *plano de la lámina* por medio de t_a y t_b. Puesto que $t_1 + t_2 + t_3$ es la suma de componentes diagonales del tensor de las *tensiones, que experimenta la lámina*, aquélla es igual a la suma de los valores propios del tensor, es decir, a $t_a + t_b$, porque la lámina *experimenta las tensiones que* están en su plano.

Para el germanio del tipo *n*:

$$\Pi_{11}+2\Pi_{12}-\Pi_{44} = 123{,}2\cdot 10^{-12}\ \text{cm}^2/\text{din},$$

$$t_a+t_b = \frac{3\Delta R}{R(\Pi_{11}+2\Pi_{12}-\Pi_{44})} \approx 30\ \text{kgf/cm}^2.$$

10.10. *Una* de las aplicaciones prácticas interesantes de los tensocaptadores semiconductores es la medición de la presión. *¿Cuál de los cristales semiconductores: p-Ge, p-PbTe* o *p*-InSb posee mayor sensibilidad en calidad del indicador de la presión hidrostática?

Solución. El coeficiente de sensibilidad del captador semiconductor de la presión hidrostática basado *en el efecto* piezorresistivo se determina como la relación del cambio de la resistencia de *la probeta* $\frac{\Delta R}{R}$ *originado por la acción de* la presión hidrostática a la magnitud de esta presión, es *decir,*

$$\Pi_p = \frac{\Delta R}{R(-p)} = -(\Pi_{11}+2\Pi_{12}).$$

Por consiguiente, el coeficiente de sensibilidad en 10^{-12} cm²/*din:*

para *p*-Ge es 2,7,
para *p*-PbTe es 115,
para *p*-InSb es 300.

Así pues, el coeficiente de sensibilidad del captador de las presiones de p-InSb es tres veces mayor que el del captador de p-PbTe, y, aproximadamente, 100 veces que el del captador de p-Ge.

Problemas

10.11. Para medir las tensiones principales que actúan en el plano se utilizó el tensómetro de silicio del tipo n representado en la fig. 10.5. La corriente se deja pasar en la dirección perpendicular al plano del captador, orientado por (100).

¿Cuál es la suma de las tensiones a medir, si el cambio de la resistencia del captador es de 0,11%?

10.12. Determinar la sensibilidad del tensocaptador de silicio del tipo p destinado a medir las tensiones, cortado en la dirección de [111], que trabaja en el régimen: a) del efecto piezorresistivo longitudinal, b) del efecto transversal observado en la dirección de [110].

10.13. ¿Qué deformación relativa se puede medir con ayuda del captador semiconductor, con el coeficiente de tensosensibilidad de 50 y la resistencia de 100 ohm, si la tensión de los ruidos de agitación térmica para tal captador $V_T \approx 1{,}3 \cdot 10^{-9}$ V y la tensión de la señal ha de superar 10 veces la tensión de ruidos?

La corriente a través del captador se recibe igual a 0,01 A.

10.14. La determinación de los coeficientes piezorresistivos de los monocristales del germanio del tipo n con la resistencia específica de 9,9 ohm·cm se efectuó en tres probetas de las dimensiones de $6 \times 1 \times 1$ mm³. La orientación de las probetas y la representación esquemática del experimento se dan en la fig. 10.1. Durante la acción de la tensión de compresión uniaxial de 10^8 din/cm², la resistencia de la primera probeta (véase la fig. 10.1,*a*), de la segunda (véase la fig. 10.1,*b*) y de la tercera (véase la fig. 10.1,*c*) aumentó, respectivamente, en 0,279, 0,297 y 4,37 ohm.

¿Cuáles son los coeficientes piezorresistivos que caracterizan los monocristales de germanio del tipo n?

10.15. Comparar la magnitud de la señal de salida obtenida de los captadores metálico y semiconductor que trabajan durante la deformación de 0,05% en el esquema repre-

sentado en la fig. 10.4, si la corriente que circula a través de los captadores fue de 20 mA.

Para el captador metálico: $K = 2$, $R = 120$ ohm.

Para el captador semiconductor de germanio del tipo n orientado en la dirección de [111], $R = 350$ ohm.

10.16. El cambio de la resistencia del captador semiconductor de la presión hidrostática, hecho de antimoniuro de indio, del tipo p, de las dimensiones de $1{,}6 \times 1 \times 0{,}8$ mm³, es de 3,24 ohm. ¿Cuál es la magnitud de la presión medida?

10.17. ¿Cuántas veces la sensibilidad del captador largo y delgado de silicio del tipo p, orientado en la dirección de [111], es mayor que la sensibilidad de los captadores del mismo material orientados en las direcciones de [100] y [110]?

10.18. ¿Cuáles son los límites del cambio de la magnitud del coeficiente que determina el efecto piezorresistivo de deslizamiento en los cristales de germanio y de silicio con la conductibilidad del tipo p?

10.19. Antes del descubrimiento del efecto piezorresistivo en los cristales semiconductores, en la técnica de mediciones y de análisis de las deformaciones se empleaban en gran escala los tensocaptadores metálicos, cuyos coeficientes de tensosensibilidad se encontraban dentro de los límites de 2 a 4.

Calcular los límites del cambio del coeficiente de tensosensibilidad de los captadores de las deformaciones, hechos de silicio y germanio, del tipo p, basados en el empleo del efecto longitudinal, y compararlo con el coeficiente de tensosensibilidad de los captadores metálicos.

10.20. ¿Qué coeficientes elastorresistivos caracterizan los cristales de silicio?

10.21. ¿Qué tensión mecánica se puede medir por medio del tensocaptador delgado de silicio del tipo p orientado en la dirección de [111], si la tensión de la señal, que es diez veces mayor que la tensión de los ruidos de agitación térmica, para tal captador es igual a $1{,}3 \cdot 10^{-8}$ V? La resistencia del captador es de 100 ohm, la corriente a través del captador es de 10 mA.

10.22. El captador delgado de germanio del tipo n orientado en la dirección de [111] y el captador metálico trabajan durante la deformación de $8 \cdot 10^{-4}$ en el esquema representado en la fig. 10.4.

Calcular la magnitud de la señal de salida para los dos captadores, si su resistencia es de 25 ohm, la corriente es de 20 mA y la sensibilidad del captador metálico es de 2.

10.23. En el proceso de las pruebas de resistencia, para medir las deformaciones de una pieza del avión, a ésta se pegó el tensocaptador filiforme de silicio del tipo p, orientado en la dirección de [111], de las dimensiones de $15 \times \times 1 \times 0{,}5$ mm^3. ¿Qué deformaciones experimentó la pieza, si el cambio máximo de la resistencia del tensocaptador fue de 2,44 ohm?

10.24. Para medir la presión en un medio con la temperatura de 600° C se utilizó el captador de silicio del tipo n. Calcular la magnitud de la presión en el medio, si el cambio de la resistencia del captador fue de 0,09%?

10.25. Antes del descubrimiento del efecto piezorresistivo en los cristales semiconductores, en la técnica de mediciones de tensiones y deformaciones se empleaban en gran escala los tensocaptadores de alambre con el coeficiente de tensosensibilidad de 2 a 4. ¿Cuáles son los límites del cambio del coeficiente de sensibilidad de los captadores filiformes de silicio del tipo n que corresponden a los valores extremos del coeficiente piezorresistivo?

10.26. ¿Cuáles son los coeficientes piezorresistivos del rutilo (la clase de simetría $4/mmm$) que se pueden determinar con ayuda del experimento representado esquemáticamente en la fig. 10.1?

10.27. El efecto piezorresistivo enlazado con la redistribución de los electrones a causa del desplazamiento de los niveles energéticos se determina por la relación de la energía de desplazamiento de los niveles ΔE a la energía media cinética de los electrones, es decir, por la magnitud $\frac{\Delta E}{E_{\text{cin}}}$.

Partiendo de lo antedicho, determinar ¿cuántas veces la magnitud del efecto piezorresistivo en los cristales semiconductores a la temperatura normal ha de sobrepasar la magnitud de este efecto en los metales?

TABLAS

Símbolos de 32 clases de simetría

Tabla 1

Singonía	Notaciones			
	internacionales	según Schoenflies	fórmula de simetría	según Shúbnikov
Triclínica	1	C_1	L_1	1
	$\bar{1}$	C_i	C	$\bar{2}$
Monoclínica	2	C_2	L_2	2
	m	C_s	P	m
	$2/m$	C_{2h}	L_2PC	$2:m$
Rómbica	222	D_2	$3L_2$	$2:2$
	$mm2$	C_{2v}	$L_2 2P$	$2 \cdot m$
	mmm	D_{2h}	$3L_2 3PC$	$m \cdot 2 : m$
Tetragonal	4	C_4	L_4	4
	$4/m$	C_{4h}	L_4PC	$4:m$
	422	D_4	$L_4 4L_2$	$4:2$
	$4mm$	C_{4v}	$L_4 4P$	$4 \cdot m$
	$4/mmm$	D_{4h}	$L_4 4L_2 5PC$	$m \cdot 4 : m$
	$\bar{4}$	S_4	$L_{\bar{4}}$	$\bar{4}$
	$\bar{4}2m$	D_{2d}	$L_{\bar{4}} 2L_2 2P$	$\bar{4} \cdot m$
Trigonal	3	C_3	L_3	3
	$\bar{3}$	C_{3i}	L_3C	$\bar{6}$
	32	D_3	$L_3 3L_2$	$3:2$
	$3m$	C_{3v}	$L_3 3P$	$3 \cdot m$
	$\bar{3}m$	D_{3d}	$L_3 3L_2 3PC$	$\bar{6} \cdot m$
Hexagonal	6	C_6	L_6	6
	$6/m$	C_{6h}	L_6PC	$6:m$
	622	D_6	$L_6 6L_2$	$6:2$
	$6mm$	C_{6v}	$L_6 6P$	$6 \cdot m$
	$6/mmm$	D_{6h}	$L_6 6L_2 7PC$	$m \cdot 6 : m$
	$\bar{6}$	C_{3h}	L_3P	$3:m$
	$\bar{6}m2$	D_{3h}	$L_3 3L_2 4P$	$m \cdot 3 : m$
Cúbica	23	T	$4L_3 3L_2$	$3/2$
	$m3$	T_h	$4L_3 3L_2 3PC$	$\bar{6}/2$
	432	O	$4L_3 3L_4 6L_2$	$\bar{3}/4$
	$\bar{4}3m$	T_d	$4L_3 3L_{\bar{4}} 6P$	$3/\bar{4}$
	$m3m$	O_h	$4L_3 3L_4 6L_2 9PC$	$\bar{6}/4$

Tabla 2

Designaciones de los elementos de simetría en la proyección estereográfica

Elemento de simetría	Símbolo en estereograma	Símbolo internacional
Centro de simetría	No hay símbolo	$\bar{1}$
Plano especular	La línea recta continua o un arco de circunferencia	m
Ejes de rotación		
Eje de primer orden	No hay símbolo	1
Eje de segundo orden		2
Eje de tercer orden		3
Eje de cuarto orden		4
Eje de sexto orden		6
Ejes de inversión		
Eje de primer orden ≡ centro de simetría	No hay símbolo	$\bar{1}$
Eje de segundo orden ≡ plano especular perpendicular al eje	El mismo que para el plano especular	$\bar{2}\ (\equiv m)$
Eje de tercer orden		$\bar{3}$
Eje de cuarto orden		$\bar{4}$
Eje de sexto orden		$\bar{6}\ (\equiv 3/m)$

Reglas de establecer cristales (según singonías) (sistemas cristalográficos de coordenadas)

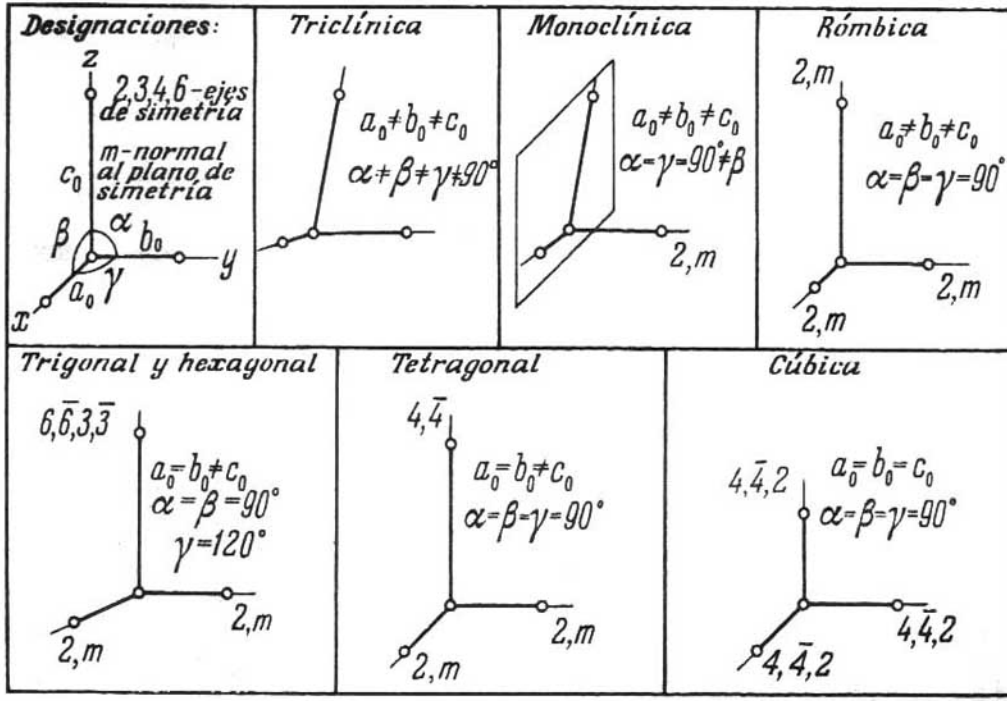
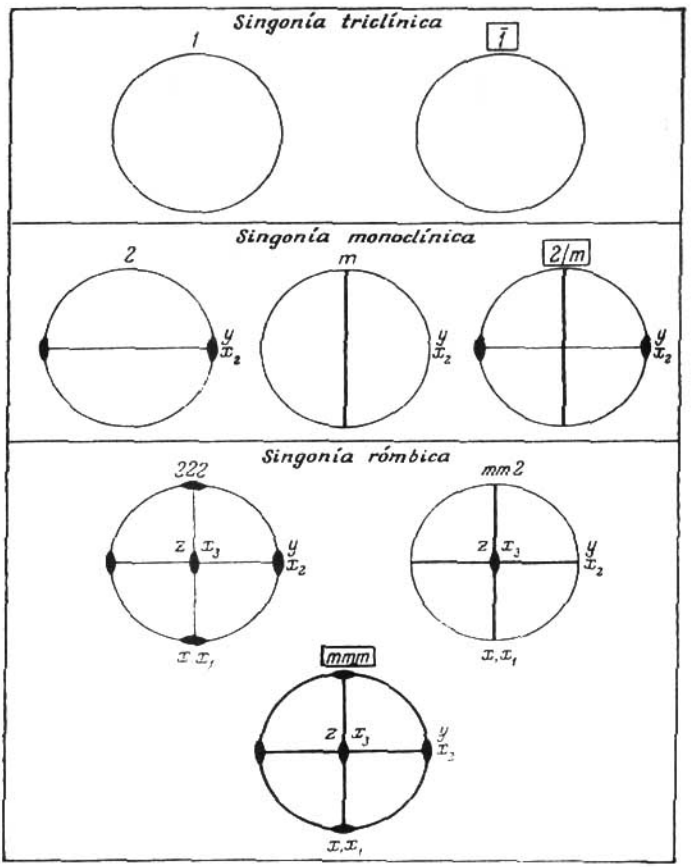
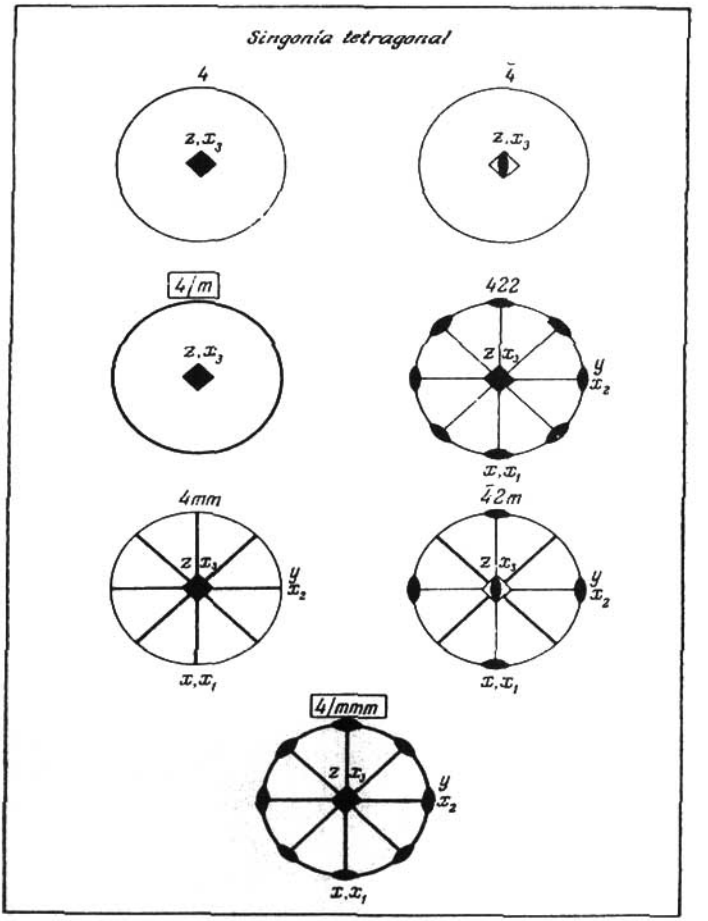


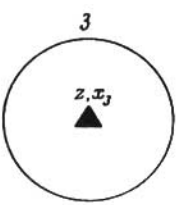
Tabla 4

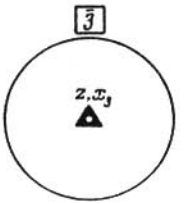
Elementos de simetría y reglas de elección de los ejes en 32 clases cristalográficas (Símbolos de las clases centrosimétricas están enmarcadas)

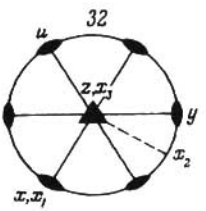


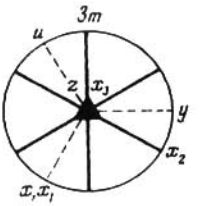

Singonía tetragonal
4
z, x3
4̄
z, x3
4/m
z, x3
422
z x3
y x2
x, x1
4mm
z x3
y x2
x, x1
4̄2m
z x3
y x2
x, x1
4/mmm
z x3
y x2
x, x1

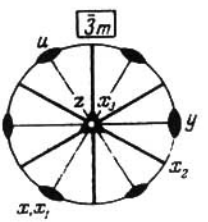
Singonía trigonal

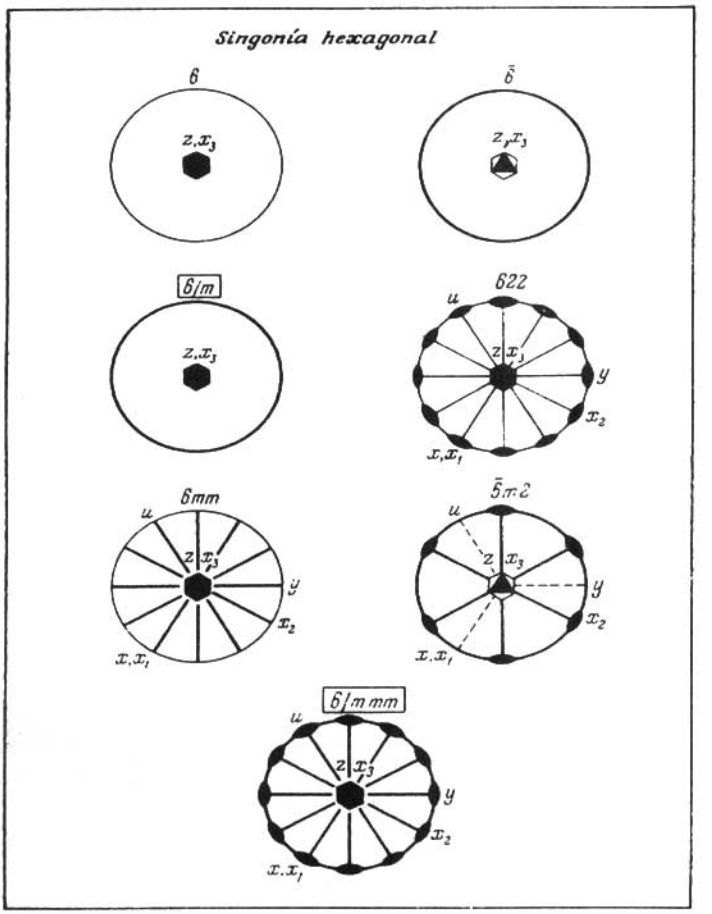




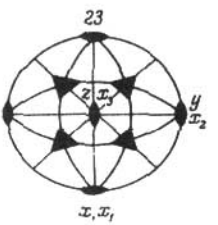


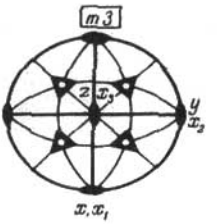


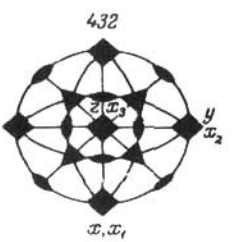


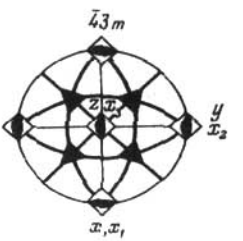

Singonía hexagonal
6
z, x3
6̄
z, x3
6/m
z, x3
622
u
z
x3
y
x2
x, x1
6mm
u
z
x3
y
x2
x, x1
6̄m2
u
z
x3
y
x2
x, x1
6/mmm
u
z
x3
y
x2
x, x1

Singonía cúbica









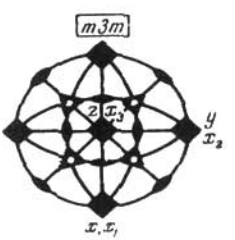


Tabla 5

Reglas de elección de los ejes cristalofísicos

Singonía	X_3	X_2	X_1
Triclínica	[001]	En el plano perpendicular a la dirección de [001]	
Monoclínica	[001]	[010]	En el plano (100)
Rómbica	[001]	[010]	[100]
Tetragonal	[001]	[010]	[100]
Trigonal y hexagonal	[0001]	$[01\bar{1}0]$	$[2\bar{1}\bar{1}0]$
Cúbica	[001]	[010]	[100]

Tabla 6

Forma de las matrices de los módulos (d_{ij}) y coeficientes (ϱ_{ij}) piezoeléctricos

Clases centrosimétricas: todos los módulos son iguales a cero.
Clases no centrosimétricas:

Singonía triclínica

Clase 1

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{pmatrix} \quad (18)$$

Singonía monoclínica

Clase 2, $2 \parallel X_2$ (orientación ordinaria)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & 0 & d_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{34} & 0 & d_{36} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Clase 2, $2 \parallel X_3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & d_{25} & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & d_{36} \end{pmatrix}$$

Clase m, $m \perp X_2$ (orientación ordinaria)

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & d_{35} & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Clase m, $m \perp X_3$

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & 0 & 0 & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & 0 & 0 & d_{26} \\ 0 & 0 & 0 & d_{34} & d_{35} & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Singonía rómbica

Clase 222

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Clase $mm2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Continuación

Singonía tetragonal

Clase 4

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & -d_{14} & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(4)}$$

Clase $\bar{4}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d_{15} & d_{14} & 0 \\ d_{31} & -d_{31} & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{pmatrix}_{(4)}$$

Clase 422

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(1)}$$

Clase $4mm$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(3)}$$

Clase $\bar{4}2m$, $2 \parallel X_1$ (orientación ordinaria)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{pmatrix}_{(2)}$$

Singonía trigonal

Clase 3

$$\begin{pmatrix} d_{11} & -d_{11} & 0 & d_{14} & d_{15} & -2d_{22} \\ -d_{22} & d_{22} & 0 & d_{15} & -d_{14} & 2d_{11} \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(6)}$$

Clase 32

$$\begin{pmatrix} d_{11} & -d_{11} & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{14} & -2d_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(2)}$$

Clase $3m$, $m \perp X_1$ (orientación ordinaria)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & -2d_{22} \\ -d_{22} & d_{22} & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(4)}$$

Clase $3m$, $m \perp X_2$

$$\begin{pmatrix} d_{11} & -d_{11} & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & -2d_{11} \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(4)}$$

Singonía hexagonal

Clase 6; igual que la clase 4

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & -d_{14} & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(4)}$$

Clase $6mm$; igual que la clase $4mm$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(3)}$$

Clase 622; igual que la clase 422

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(1)}$$

Clase $\bar{6}$

$$\begin{pmatrix} d_{11} & -d_{11} & 0 & 0 & 0 & -2d_{22} \\ -d_{22} & d_{22} & 0 & 0 & 0 & 2d_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(2)}$$

Clase $\bar{6}m2$, $m \perp X_1$ (orientación ordinaria)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2d_{22} \\ -d_{22} & d_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(1)}$$

Clase $\bar{6}m2$, $m \perp X_2$

$$\begin{pmatrix} d_{11} & -d_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2d_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(1)}$$

Continuación

Singonía cúbica

Clase 432

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(0)}$$

Clase $\bar{4}3m$ y clase 23

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} \end{pmatrix}_{(1)}$$

Tabla 7

Forma de las matrices de los coeficientes piezoeléctricos (h_{ij}) y (e_{ij}) para los cristales que tienen estas matrices, diferentes de las matrices (d_{ij}) y (σ_{ij})

Clase 3

$$\begin{pmatrix} h_{11} & -h_{11} & 0 & h_{14} & h_{15} & -h_{22} \\ -h_{22} & h_{22} & 0 & h_{15} & -h_{14} & -h_{11} \\ h_{31} & h_{31} & h_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(6)}$$

Clase 32

$$\begin{pmatrix} h_{11} & -h_{11} & 0 & h_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -h_{14} & -h_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(2)}$$

Clase $\bar{6}$

$$\begin{pmatrix} h_{11} & -h_{11} & 0 & 0 & 0 & -h_{22} \\ -h_{22} & h_{22} & 0 & 0 & 0 & -h_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(3)}$$

Clase $3m$, $m \perp X_1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & h_{15} & -h_{22} \\ -h_{22} & h_{22} & 0 & h_{15} & 0 & 0 \\ h_{31} & h_{31} & h_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(4)}$$

Clase $\bar{6}m2$

$$\begin{pmatrix} h_{11} & -h_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -h_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(1)}$$

Tabla 8

***Forma de las matrices* de los módulos piezoeléctricos (d_{ij}) para algunas texturas piezoeléctricas**

Grupo ∞

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & -d_{14} & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(4)}$$

Grupo ∞m

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(3)}$$

Grupo $\infty 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(1)}$$

Tabla 9

Forma de las matrices de compresibilidades elásticas (s_{ij}) y de rigideces elásticas (c_{ij})

Singonía triclínica

Las dos clases

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ s_{15} & s_{25} & s_{35} & s_{45} & s_{55} & s_{56} \\ s_{16} & s_{26} & s_{36} & s_{46} & s_{56} & s_{66} \end{pmatrix} \quad (21) \qquad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{pmatrix} \quad (21)$$

Singonía monoclínica

Todas las clases, $2 \parallel X_2$ (orientación ordinaria)

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & s_{15} & 0 \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & 0 & s_{25} & 0 \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & 0 & s_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & s_{46} \\ s_{15} & s_{25} & s_{35} & 0 & s_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{46} & 0 & s_{66} \end{pmatrix} \quad (13) \qquad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & c_{15} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & c_{25} & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & c_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{46} & 0 & c_{66} \end{pmatrix} \quad (13)$$

Singonía rómbica

Todas las clases

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} \end{pmatrix} \quad (9) \qquad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Singonía tetragonal

Clases 4, $\bar{4}$, 4/m

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & s_{16} \\ s_{12} & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & -s_{16} \\ s_{13} & s_{13} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ s_{16} & -s_{16} & 0 & 0 & 0 & s_{66} \end{pmatrix} \quad (7) \qquad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & -c_{16} \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ c_{16} & -c_{16} & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Clases $4mm$, $\bar{4}2m$, 422, $4/mmm$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{13} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} \end{pmatrix} \quad (6) \qquad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Singonía trigonal

Clases 3, $\bar{3}$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & -s_{25} & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{13} & -s_{14} & s_{25} & 0 \\ s_{13} & s_{13} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ s_{14} & -s_{14} & 0 & s_{44} & 0 & 2s_{25} \\ -s_{25} & s_{25} & 0 & 0 & s_{44} & 2s_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 2s_{25} & 2s_{14} & 2(s_{11}-s_{12}) \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & -c_{25} & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & -c_{14} & c_{25} & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ c_{14} & -c_{14} & 0 & c_{44} & 0 & c_{25} \\ -c_{25} & c_{25} & 0 & 0 & c_{44} & c_{14} \\ 0 & 0 & 0 & c_{25} & c_{14} & \frac{1}{2}(c_{11}-c_{12}) \end{pmatrix} \quad (7)$$

Clases 32, $\bar{3}m$, $3m$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{13} & -s_{14} & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{13} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ s_{14} & -s_{14} & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 2s_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2s_{14} & 2(s_{11}-s_{12}) \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & -c_{14} & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ c_{14} & -c_{14} & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{14} & \frac{1}{2}(c_{11}-c_{12}) \end{pmatrix} \quad (6)$$

Singonía hexagonal

Todas las clases

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{13} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(s_{11}-s_{12}) \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{11}-c_{12}) \end{pmatrix} \quad (5)$$

Continuación

Singonía cúbica

Todas las clases

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{12} & s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} \end{pmatrix} \quad (3) \qquad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Los medios ininterrumpidos homogéneos (texturas), que se describen por los grupos

$$\infty m,\ \infty,\ \frac{\infty}{m},\ \infty/mmm,\ \infty 2$$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{13} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{41} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(s_{11}-s_{12}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{11}-c_{12}) \end{pmatrix}$$

Medio isótropo

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{12} & s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(s_{11}-s_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(s_{11}-s_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(s_{11}-s_{12}) \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{11}-c_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{11}-c_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{11}-c_{12}) \end{pmatrix} \quad (2)$$

Tabla 10

Forma de las matrices de los coeficientes piezoópticos (π_{kl}) y coeficientes elastoópticos (p_{kl})

Singonía triclínica

Las dos clases

$$\begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & \pi_{14} & \pi_{15} & \pi_{16} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} & \pi_{24} & \pi_{25} & \pi_{26} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} & \pi_{34} & \pi_{35} & \pi_{36} \\ \pi_{41} & \pi_{42} & \pi_{43} & \pi_{44} & \pi_{45} & \pi_{46} \\ \pi_{51} & \pi_{52} & \pi_{53} & \pi_{54} & \pi_{55} & \pi_{56} \\ \pi_{61} & \pi_{62} & \pi_{63} & \pi_{64} & \pi_{65} & \pi_{66} \end{pmatrix} \quad (36) \qquad \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & p_{16} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} & p_{26} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} & p_{36} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & p_{45} & p_{46} \\ p_{51} & p_{52} & p_{53} & p_{54} & p_{55} & p_{56} \\ p_{61} & p_{62} & p_{63} & p_{64} & p_{65} & p_{66} \end{pmatrix} \quad (36)$$

Singonía monoclínica

Todas las clases

Eje $2 \parallel X_2$ (orientación ordinaria)

$$\begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & 0 & \pi_{15} & 0 \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} & 0 & \pi_{25} & 0 \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} & 0 & \pi_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 & \pi_{46} \\ \pi_{51} & \pi_{52} & \pi_{53} & 0 & \pi_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{64} & 0 & \pi_{66} \end{pmatrix} \quad (20) \qquad \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & 0 & p_{15} & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & 0 & p_{25} & 0 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & 0 & p_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & 0 & p_{46} \\ p_{51} & p_{52} & p_{53} & 0 & p_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{64} & 0 & p_{66} \end{pmatrix} \quad (20)$$

Eje $2 \parallel X_3$

$$\begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & 0 & 0 & \pi_{16} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} & 0 & 0 & \pi_{26} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} & 0 & 0 & \pi_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & \pi_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{54} & \pi_{55} & 0 \\ \pi_{61} & \pi_{62} & \pi_{63} & 0 & 0 & \pi_{66} \end{pmatrix} \quad (20) \qquad \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & 0 & 0 & p_{16} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & 0 & 0 & p_{26} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & 0 & 0 & p_{36} \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & p_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{54} & p_{55} & 0 \\ p_{61} & p_{62} & p_{63} & 0 & 0 & p_{66} \end{pmatrix} \quad (20)$$

Singonía rómbica

Todas las clases

$$\begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{66} \end{pmatrix} \quad (12) \qquad \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & 0 & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & 0 & 0 & 0 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & p_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{66} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Singonía tetragonal

Clases 4, $\bar{4}$ y $4/m$

$$\begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & 0 & 0 & \pi_{16} \\ \pi_{12} & \pi_{11} & \pi_{13} & 0 & 0 & -\pi_{16} \\ \pi_{31} & \pi_{31} & \pi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & \pi_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\pi_{45} & \pi_{44} & 0 \\ \pi_{61} & -\pi_{61} & 0 & 0 & 0 & \pi_{66} \end{pmatrix} \quad (10) \qquad \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & 0 & 0 & p_{16} \\ p_{12} & p_{11} & p_{13} & 0 & 0 & -p_{16} \\ p_{31} & p_{31} & p_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & p_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p_{45} & p_{44} & 0 \\ p_{61} & -p_{61} & 0 & 0 & 0 & p_{66} \end{pmatrix} \quad (10$$

Continuación

Clases $4mm$, $\bar{4}m$, 422 y $4/mmm$

$$\begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{11} & \pi_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{31} & \pi_{31} & \pi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{66} \end{pmatrix} (7) \qquad \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{11} & p_{13} & 0 & 0 & 0 \\ p_{31} & p_{31} & p_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{66} \end{pmatrix} (7)$$

Singonía trigonal

Clases 3 y $\bar{3}$

$$\begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & \pi_{14} & -\pi_{25} & 2\pi_{62} \\ \pi_{12} & \pi_{11} & \pi_{13} & -\pi_{14} & \pi_{25} & -2\pi_{62} \\ \pi_{31} & \pi_{31} & \pi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{41} & -\pi_{41} & 0 & \pi_{44} & \pi_{45} & 2\pi_{52} \\ -\pi_{52} & \pi_{52} & 0 & -\pi_{45} & \pi_{44} & 2\pi_{41} \\ -\pi_{62} & \pi_{62} & 0 & \pi_{25} & \pi_{14} & \pi_{11}-\pi_{12} \end{pmatrix} (12)$$

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & -p_{25} & p_{62} \\ p_{12} & p_{11} & p_{13} & -p_{14} & p_{25} & -p_{62} \\ p_{31} & p_{31} & p_{33} & 0 & 0 & 0 \\ p_{41} & -p_{41} & 0 & p_{44} & p_{45} & p_{52} \\ -p_{52} & p_{52} & 0 & -p_{45} & p_{44} & p_{41} \\ -p_{62} & p_{62} & 0 & p_{25} & p_{14} & \frac{1}{2}(p_{11}-p_{12}) \end{pmatrix} (12)$$

Clases $3m$, 32 y $\bar{3}m$

$$\begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & \pi_{14} & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{11} & \pi_{13} & -\pi_{14} & 0 & 0 \\ \pi_{31} & \pi_{31} & \pi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{41} & -\pi_{41} & 0 & \pi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 2\pi_{41} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{14} & \pi_{11}-\pi_{12} \end{pmatrix} (8)$$

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{11} & p_{13} & -p_{14} & 0 & 0 \\ p_{31} & p_{31} & p_{33} & 0 & 0 & 0 \\ p_{41} & -p_{41} & 0 & p_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{44} & p_{41} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{14} & \frac{1}{2}(p_{11}-p_{12}) \end{pmatrix} (8)$$

Continuación

Singonía hexagonal

Clases $\bar{6}$, 6 y 6/*m*

$$\begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & 0 & 0 & 2\pi_{62} \\ \pi_{12} & \pi_{11} & \pi_{13} & 0 & 0 & -2\pi_{62} \\ \pi_{31} & \pi_{31} & \pi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & \pi_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\pi_{45} & \pi_{44} & 0 \\ -\pi_{62} & \pi_{62} & 0 & 0 & 0 & \pi_{11}-\pi_{12} \end{pmatrix}_{(8)}$$

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & 0 & 0 & p_{62} \\ p_{12} & p_{11} & p_{13} & 0 & 0 & -p_{62} \\ p_{31} & p_{31} & p_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & p_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p_{45} & p_{44} & 0 \\ -p_{62} & p_{62} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(p_{11}-p_{12}) \end{pmatrix}_{(8)}$$

Clases $\bar{6}m2$, 6*mm*, 622 y 6/*mmm*

$$\begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{11} & \pi_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{31} & \pi_{31} & \pi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{11}-\pi_{12} \end{pmatrix}_{(6)}$$

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{11} & p_{13} & 0 & 0 & 0 \\ p_{31} & p_{31} & p_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(p_{11}-p_{12}) \end{pmatrix}_{(6)}$$

Singonía cúbica

Clases 23 y *m*3

$$\begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{11} & \pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{13} & \pi_{13} & \pi_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} \end{pmatrix}_{(4)} \qquad \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & 0 & 0 & 0 \\ p_{13} & p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{13} & p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{44} \end{pmatrix}_{(4)}$$

Clases $\bar{4}3m$, 432 y *m*3*m*

$$\begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{11} & \pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{12} & \pi_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} \end{pmatrix}_{(3)} \qquad \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{12} & p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{44} \end{pmatrix}_{(3)}$$

Continuación

Medio isótropo

$$\begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{11} & \pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{12} & \pi_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{11}-\pi_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{11}-\pi_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{11}-\pi_{12} \end{pmatrix}_{(2)}$$

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{12} & p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(p_{11}-p_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(p_{11}-p_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(p_{11}-p_{12}) \end{pmatrix}_{(2)}$$

Tabla 11

Forma de las matrices de los coeficientes del efecto lineal electroóptico (r_{ij})

Singonía triclínica

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} \\ r_{61} & r_{62} & r_{63} \end{pmatrix}_{(18)}$$

Singonía monoclínica

Clase 2

$2 \parallel X_2$

$$\begin{pmatrix} 0 & r_{12} & 0 \\ 0 & r_{22} & 0 \\ 0 & r_{32} & 0 \\ r_{41} & 0 & r_{43} \\ 0 & r_{52} & 0 \\ r_{61} & 0 & r_{63} \end{pmatrix}_{(8)}$$

$2 \parallel X_3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ r_{41} & r_{42} & 0 \\ r_{51} & r_{52} & 0 \\ 0 & 0 & r_{63} \end{pmatrix}_{(8)}$$

Clase m

$m \perp X_2$

$$\begin{pmatrix} r_{11} & 0 & r_{13} \\ r_{21} & 0 & r_{23} \\ r_{31} & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{42} & 0 \\ r_{51} & 0 & r_{53} \\ 0 & r_{62} & 0 \end{pmatrix}_{(10)}$$

$m \perp X_3$

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & 0 \\ 0 & 0 & r_{43} \\ 0 & 0 & r_{53} \\ r_{61} & r_{62} & 0 \end{pmatrix}_{(10)}$$

Continuación

Singonía rómbica

Clase 222

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{52} & 0 \\ 0 & 0 & r_{63} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Clase $mm2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{42} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Singonía tetragonal

Clase 4

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ r_{41} & r_{51} & 0 \\ r_{51} & -r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Clase $\bar{4}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & -r_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & -r_{52} & 0 \\ r_{52} & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{63} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Clase 422

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & -r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Clase $4mm$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{31} \\ 0 & 0 & r_{31} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{51} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Clase $\bar{4}2m$, $2 \parallel X_1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{63} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Singonía trigonal

Clase 3

$$\begin{pmatrix} r_{11} & -r_{22} & r_{13} \\ -r_{11} & r_{22} & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ r_{41} & r_{51} & 0 \\ r_{51} & -r_{41} & 0 \\ -r_{22} & -r_{11} & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Clase 32

$$\begin{pmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ -r_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & -r_{41} & 0 \\ 0 & -r_{11} & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Continuación

Clase $3m$, $m \perp X_1$

$$\begin{pmatrix} 0 & -r_{22} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{51} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ -r_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(4)}$$

Clase $3m$, $m \perp X_2$

$$\begin{pmatrix} r_{11} & 0 & r_{13} \\ -r_{11} & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{51} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ 0 & -r_{11} & 0 \end{pmatrix}_{(4)}$$

Singonía hexagonal

Clase 6

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ r_{41} & r_{51} & 0 \\ r_{51} & -r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(4)}$$

Clase $6mm$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{51} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(3)\Sigma}$$

Clase 622

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & -r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(1)}$$

Clase $\bar{6}$

$$\begin{pmatrix} r_{11} & -r_{22} & 0 \\ -r_{11} & r_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -r_{22} & -r_{11} & 0 \end{pmatrix}_{(2)}$$

Clase $\bar{6}m2$, $m \perp X_1$

$$\begin{pmatrix} 0 & r_{12} & 0 \\ 0 & -r_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{12} & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(1)}$$

Clase $\bar{6}m2$, $m \perp X_2$

$$\begin{pmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ -r_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_{11} & 0 \end{pmatrix}_{(1)}$$

Singonía cúbica

Clase 432

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(0)}$$

Clase $\bar{4}3m$ y clase 23

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{41} \end{pmatrix}_{(1)}$$

Tabla 11,a

Forma de las matrices de los coeficientes del efecto electroóptico cuadrático (R_{ij})

Singonía triclínica

Las dos clases

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} & R_{15} & R_{16} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} & R_{25} & R_{26} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} & R_{35} & R_{36} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} & R_{45} & R_{46} \\ R_{51} & R_{52} & R_{53} & R_{54} & R_{55} & R_{56} \\ R_{61} & R_{62} & R_{63} & R_{64} & R_{65} & R_{66} \end{pmatrix} \quad (36)$$

Singonía monoclínica

Todas las clases

$2 \parallel X_2,\ X_2 \perp m$

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & 0 & R_{15} & 0 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & 0 & R_{25} & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & 0 & R_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{44} & 0 & R_{46} \\ R_{51} & R_{52} & R_{53} & 0 & R_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{64} & 0 & R_{66} \end{pmatrix} \quad (20)$$

$2 \parallel X_3,\ X_3 \perp m$

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & 0 & 0 & R_{16} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & 0 & 0 & R_{26} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & 0 & 0 & R_{36} \\ 0 & 0 & 0 & R_{44} & R_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{54} & R_{55} & 0 \\ R_{61} & R_{62} & R_{63} & 0 & 0 & R_{66} \end{pmatrix} \quad (20)$$

Singonía rómbica

Todas las clases

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & 0 & 0 & 0 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & 0 & 0 & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{66} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Singonía tetragonal

Clases 4, $\bar{4}$, 4/*m*

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & 0 & 0 & R_{16} \\ R_{12} & R_{11} & R_{13} & 0 & 0 & -R_{16} \\ R_{31} & R_{31} & R_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{44} & R_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_{45} & R_{44} & 0 \\ R_{61} & -R_{61} & 0 & 0 & 0 & R_{66} \end{pmatrix} \quad (10)$$

Continuación

Clases $4mm$, $\bar{4}2m$, 422, $4/mmm$

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & 0 & 0 & 0 \\ R_{12} & R_{11} & R_{13} & 0 & 0 & 0 \\ R_{31} & R_{31} & R_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{66} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Singonía trigonal

Clases 3, $\bar{3}$

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} & -R_{25} & 2R_{62} \\ R_{12} & R_{11} & R_{13} & -R_{14} & R_{25} & -2R_{62} \\ R_{31} & R_{31} & R_{33} & 0 & 0 & 0 \\ R_{41} & -R_{41} & 0 & R_{44} & R_{45} & 2R_{52} \\ -R_{52} & R_{52} & 0 & -R_{45} & R_{44} & 2R_{41} \\ -R_{62} & R_{62} & 0 & R_{25} & R_{14} & (R_{11}-R_{12}) \end{pmatrix} \quad (12)$$

Clases $3m$, $\bar{3}m$, 32

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} & 0 & 0 \\ R_{12} & R_{11} & R_{13} & -R_{14} & 0 & 0 \\ R_{31} & R_{31} & R_{33} & 0 & 0 & 0 \\ R_{41} & -R_{41} & 0 & R_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{44} & 2R_{41} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{14} & (R_{11}-R_{12}) \end{pmatrix} \quad (8)$$

Singonía hexagonal

Clases 6, $\bar{6}$, $6/m$

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & 0 & 0 & 2R_{62} \\ R_{12} & R_{11} & R_{13} & 0 & 0 & -2R_{62} \\ R_{31} & R_{31} & R_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{44} & R_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_{45} & R_{44} & 0 \\ -R_{62} & R_{62} & 0 & 0 & 0 & (R_{11}-R_{12}) \end{pmatrix} \quad (8)$$

Clases $\bar{6}m2$, $6mm$, 622, $6/mmm$

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & 0 & 0 & 0 \\ R_{12} & R_{11} & R_{13} & 0 & 0 & 0 \\ R_{31} & R_{31} & R_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (R_{11}-R_{12}) \end{pmatrix} \quad (6)$$

Singonía cúbica

Clases 23, $m3$

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & 0 & 0 & 0 \\ R_{13} & R_{11} & R_{12} & 0 & 0 & 0 \\ R_{12} & R_{13} & R_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{44} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Clases $\bar{4}3m$, 432, $m3m$

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & 0 & 0 & 0 \\ R_{12} & R_{11} & R_{12} & 0 & 0 & 0 \\ R_{12} & R_{12} & R_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{44} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Continuación

Texturas ∞, $\frac{\infty}{m}$

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & 0 & 0 & 2R_{62} \\ R_{12} & R_{11} & R_{13} & 0 & 0 & -2R_{62} \\ R_{31} & R_{31} & R_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{44} & R_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_{45} & R_{44} & 0 \\ -R_{62} & R_{62} & 0 & 0 & 0 & (R_{11}-R_{12}) \end{pmatrix}_{(8)}$$

Texturas ∞m, $\frac{\infty}{2}$

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & 0 & 0 & 0 \\ R_{12} & R_{11} & R_{13} & 0 & 0 & 0 \\ R_{31} & R_{31} & R_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (R_{11}-R_{12}) \end{pmatrix}_{(6)}$$

Medio isótropo

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{12} & 0 & 0 & 0 \\ R_{12} & R_{11} & R_{12} & 0 & 0 & 0 \\ R_{12} & R_{12} & R_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (R_{11}-R_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (R_{11}-R_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (R_{11}-R_{12}) \end{pmatrix}_{(2)}$$

Tabla 11,b

Forma de las matrices de los coeficientes piezorresistivos (Π_{ij})

Singonía triclínica

Las dos clases

$$\begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & \Pi_{14} & \Pi_{15} & \Pi_{16} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} & \Pi_{23} & \Pi_{24} & \Pi_{25} & \Pi_{26} \\ \Pi_{31} & \Pi_{32} & \Pi_{33} & \Pi_{34} & \Pi_{35} & \Pi_{36} \\ \Pi_{41} & \Pi_{42} & \Pi_{43} & \Pi_{44} & \Pi_{45} & \Pi_{46} \\ \Pi_{51} & \Pi_{52} & \Pi_{53} & \Pi_{54} & \Pi_{55} & \Pi_{56} \\ \Pi_{61} & \Pi_{62} & \Pi_{63} & \Pi_{64} & \Pi_{65} & \Pi_{66} \end{pmatrix}_{(36)}$$

Singonía monoclínica

Todas las clases

Eje $2 \parallel X_2$

$$\begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & 0 & \Pi_{14} & 0 \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} & \Pi_{23} & 0 & \Pi_{24} & 0 \\ \Pi_{31} & \Pi_{32} & \Pi_{33} & 0 & \Pi_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Pi_{44} & 0 & \Pi_{46} \\ \Pi_{51} & \Pi_{52} & \Pi_{53} & 0 & \Pi_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Pi_{64} & 0 & \Pi_{66} \end{pmatrix}_{(20)}$$

Eje $2 \parallel X_3$

$$\begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{12} & 0 & 0 & \Pi_{16} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} & \Pi_{23} & 0 & 0 & \Pi_{26} \\ \Pi_{31} & \Pi_{32} & \Pi_{33} & 0 & 0 & \Pi_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \Pi_{44} & \Pi_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Pi_{54} & \Pi_{55} & 0 \\ \Pi_{61} & \Pi_{62} & \Pi_{63} & 0 & 0 & \Pi_{66} \end{pmatrix}_{(20)}$$

Singonía rómbica

Todas las clases

$$\begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} & \Pi_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \Pi_{31} & \Pi_{32} & \Pi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Pi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Pi_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Pi_{66} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Singonía tetragonal

Clases 4, $\bar{4}$, $4/m$

$$\begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & 0 & 0 & \Pi_{16} \\ \Pi_{12} & \Pi_{11} & \Pi_{13} & 0 & 0 & -\Pi_{16} \\ \Pi_{31} & \Pi_{31} & \Pi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Pi_{44} & \Pi_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Pi_{45} & \Pi_{44} & 0 \\ \Pi_{61} & -\Pi_{61} & 0 & 0 & 0 & \Pi_{66} \end{pmatrix} \quad (10)$$

Clases $4mm$, $\bar{4}2m$, 422, $4/mmm$

$$\begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \Pi_{12} & \Pi_{11} & \Pi_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \Pi_{31} & \Pi_{31} & \Pi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Pi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Pi_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Pi_{66} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Clases $\bar{6}m2$, $6mm$, 622, $6/mmm$

$$\begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \Pi_{12} & \Pi_{11} & \Pi_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \Pi_{31} & \Pi_{31} & \Pi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Pi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Pi_{44} & 0 \\ \Pi_{61} & -\Pi_{61} & 0 & 0 & 0 & (\Pi_{11}-\Pi_{12}) \end{pmatrix} \quad (6)$$

Singonía cúbica

Clases 23, $m3$

$$\begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \Pi_{13} & \Pi_{11} & \Pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \Pi_{12} & \Pi_{13} & \Pi_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Pi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Pi_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Pi_{44} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Clases $\bar{4}3m$, 432, $m3m$

$$\begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \Pi_{12} & \Pi_{11} & \Pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \Pi_{12} & \Pi_{12} & \Pi_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Pi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Pi_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Pi_{44} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Singonía trigonal

Clases 3, $\bar{3}$

$$\begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & \Pi_{14} & -\Pi_{25} & 2\Pi_{62} \\ \Pi_{12} & \Pi_{11} & \Pi_{13} & -\Pi_{14} & \Pi_{25} & -2\Pi_{62} \\ \Pi_{31} & \Pi_{31} & \Pi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \Pi_{41} & -\Pi_{41} & 0 & \Pi_{44} & \Pi_{45} & 2\Pi_{52} \\ -\Pi_{52} & \Pi_{52} & 0 & -\Pi_{45} & \Pi_{44} & -2\Pi_{41} \\ -\Pi_{62} & \Pi_{62} & 0 & \Pi_{25} & \Pi_{14} & (\Pi_{11}-\Pi_{12}) \end{pmatrix} \quad (12)$$

Continuación

Clases $3m$, 32, $\bar{3}m$

$$\begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & \Pi_{14} & 0 & 0 \\ \Pi_{12} & \Pi_{11} & \Pi_{13} & -\Pi_{14} & 0 & 0 \\ \Pi_{31} & \Pi_{31} & \Pi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \Pi_{41} & -\Pi_{41} & 0 & \Pi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Pi_{44} & 2\Pi_{41} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Pi_{14} & (\Pi_{11}-\Pi_{12}) \end{pmatrix}_{(8)}$$

Singonía hexagonal

Clases $\bar{6}$, 6, $6/m$

$$\begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & 0 & 0 & -2\Pi_{61} \\ \Pi_{12} & \Pi_{11} & \Pi_{13} & 0 & 0 & 2\Pi_{61} \\ \Pi_{31} & \Pi_{31} & \Pi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Pi_{44} & \Pi_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Pi_{45} & \Pi_{44} & 0 \\ \Pi_{61} & -\Pi_{61} & 0 & 0 & 0 & (\Pi_{11}-\Pi_{12}) \end{pmatrix}_{(8)}$$

Medio isótropo

$$\begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \Pi_{12} & \Pi_{11} & \Pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \Pi_{12} & \Pi_{12} & \Pi_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Pi_{11}-\Pi_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Pi_{11}-\Pi_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Pi_{11}-\Pi_{12} \end{pmatrix}_{(2)}$$

Tabla 12

Algunos datos de referencia acerca de los cristales, necesarios para resolver los problemas

Las sustancias van colocadas en la tabla en el orden alfabético con sus nombres más usuales.
Si no hay indicación especial, se dan los valores de las constantes físicas de los cristales, medidas a la temperatura normal.

ADP, dihidrofosfato de amonio, $NH_4H_2PO_4$, $\bar{4}2m$

$\rho = 1{,}803$ g/cm^3, $P_{máx} = 2{,}02 \cdot 10^2$ kgf/cm^2,

$n_0 = 1{,}52662$, $n_e = 1{,}48072$ para $\lambda = 5460$Å

d, 10^{-8} unid. CGSE	s, 10^{-12} unid. CGSE	c, 10^{11} unid. CGSE	ε	α, 10^{-6}grad^{-1}
$d_{14} = 5{,}27$ $d_{36} = -145$	$s_{11} = 1{,}82$ $s_{33} = 4{,}35$ $s_{44} = 11{,}53$ $s_{66} = 16{,}46$ $s_{12} = 0{,}19$ $s_{13} = -1{,}18$	$c_{11} = 6{,}17$ $c_{33} = 3{,}28$ $c_{44} = 0{,}85$ $c_{66} = 0{,}59$ $c_{12} = 0{,}72$ $c_{13} = 1{,}19$	$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 56{,}4$ $\varepsilon_3 = 16{,}4$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 30{,}1$ $\alpha_3 = 4{,}1$

Continuación

Antimoniuro de indio, InSb, $\bar{4}3m$

$\rho = 5{,}76$ g/cm^3 $\quad T_{fus} = 523$ °C

s, 10^{-12} unid. CGSE	c, 10^{11} unid. CGSE	II, 10^{-12} unid. CGSE	ρ, ohm·cm
$s_{11} = 2{,}42$ $s_{12} = -0{,}855$ $s_{13} = 3{,}34$	$c_{11} = 6{,}72$ $c_{12} = 3{,}07$ $c_{44} = 3{,}02$	$\Pi_{11} = -70$ $\Pi_{12} = -115$ $\Pi_{44} = 300$	0,54

Aragonita, $CaCO_3$, mmm

$\rho = 2{,}6 - 2{,}8$ g/cm^3, $T_{fus} = 1290$ °C a la presión de 170 at,
$\alpha_1 = 35 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}, $\alpha_2 = 17 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1},
$\alpha_3 = 10 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1} en la frecuencia de $4 \cdot 10^8$ Hz,
$\varepsilon_1 = 9{,}8$, $\varepsilon_2 = 7{,}7$, $\varepsilon_3 = 6{,}6$.

Arseniuro de galio, GaAs, $\bar{4}3m$

$\rho = 5{,}316$ g/cm^3, $T_{fus} = 1238$ °C,
$n = 3{,}15$ para $\lambda = 5460$ Å,
$r_{41} = 12{,}5 \cdot 10^{-8}$ unid. CGSE para $\lambda = 5460$ Å,
$s_{11} = 12{,}64 \cdot 10^{-12}$ unid. CGSE, $c_{11} = 1{,}19 \cdot 10^{10}$ unid. CGSE,
$s_{44} = 18{,}60 \cdot 10^{-12}$ » » , $c_{44} = 0{,}54 \cdot 10^{10}$ » » ,
$s_{12} = -4{,}23 \cdot 10^{-12}$ » » , $c_{12} = 0{,}59 \cdot 10^{10}$ » » .

Calcita, $CaCO_3$, $\bar{3}m$

$\rho = 2{,}6 - 2{,}8$ g/cm^3.

Posee el crucero por los planos paralelos a las caras del romboedro $(10\bar{1}1)$. La normal a las caras del romboedro forma con el eje $\bar{3}$ el ángulo de 44°.
$n_o = 1{,}658$, $n_e = 1{,}486$ para $\lambda = 588{,}0$ Å,
$\alpha_1 = \alpha_2 = -5{,}6 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}, $\alpha_3 = +25 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}.

Cerámica polarizada de titanato de bario, $BaTiO_3$, ∞m.

Ferroeléctrico artificial, $\rho = 5{,}5$ g/cm^3, $T_C = 115$ °C,
$\varepsilon_1 = 1596$, $\varepsilon_2 = 1872$,

d, 10^{-8} unid. CGSE,	c, 10^{11} unid. CGSE,
$d_{33} = 5{,}73$,	$c_{11} = 16{,}8$,
$d_{31} = -2{,}35$	$c_{33} = 18{,}9$,
$d_{15} = 7{,}8$,	$c_{44} = 5{,}46$,
	$c_{12} = 7{,}82$,
	$c_{13} = 7{,}10$.

Continuación

Clorato de sodio, $NaClO_3$, 23

$\rho = 2{,}49$ g/cm^3, $\varepsilon = 5{,}75$, $\alpha = 43{,}4 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}
$d_{14} = 6{,}1 \cdot 10^{-8}$ unid. CGSE,
$s_{11} = 23{,}35 \cdot 10^{-13}$ unid. CGSE,
$s_{12} = -5{,}15 \cdot 10^{-13}$ unid. CGSE,
$s_{44} = 85{,}4 \cdot 10^{-13}$ unid. CGSE.

Cloruro cuproso CuCl, $\bar{4}3m$

Para $\lambda = 0{,}535\mu$, $n_o = 1{,}996$,
$r_{41} = 18{,}3 \cdot 10^{-8}$ unid. CGSE.

Cuarzo, SiO_2

La simetría de la modificación de baja temperatura es 32, la de alta temperatura, 622.
$\rho = 2{,}648$ g/cm^3, $T_{fus} = 1700$ °C,
$c_p = 0{,}177$ cal·g^{-1}·grad^{-1},
$P_{máx} = 9{,}7$ kgf/mm^2, $n_o = 1{,}544$, $n_e = 1{,}553$ para $\lambda = 5890$ Å,
$\rho_1 = \rho_2 = 200 \cdot 10^{14}$ ohm·cm, $\rho_3 = 1 \cdot 10^{14}$ ohm·cm,
$r_{11} = 0{,}59 \cdot 10^{-8}$ unid. CGSE,
$r_{41} = 1{,}4 \cdot 10^{-8}$ unid. CGSE para $\lambda = 5460$ Å

d, 10^{-8} unid. CGSE	s, 10^{-14} unid. CGSE	c, 10^{10} unid. CGSE	ε	α, 10^{-6} grad^{-1}
$d_{11} = -6{,}76$	$s_{11} = 127{,}9$	$c_{11} = 86{,}05$	$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 4{,}5$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 13{,}4$
$d_{14} = +2{,}56$	$s_{12} = -15{,}35$	$c_{12} = 4{,}85$	$\varepsilon_3 = 4{,}6$	$\alpha_3 = 7{,}8$
	$s_{13} = -11{,}0$	$c_{13} = 10{,}45$		
	$s_{14} = -44{,}6$	$c_{14} = 18{,}25$		
	$s_{33} = 95{,}6$	$c_{33} = 107{,}1$		
	$s_{44} = 197{,}8$	$c_{44} = 58{,}65$		
	$s_{66} = 286{,}5$	$c_{66} = 40{,}5$		

DKDP, KD_2PO_4, $\bar{4}2m$

Ferroeléctrico, $T_C = -51$ °C.

Para $\lambda = 0{,}546\mu$, $n_o = 1{,}47$, $n_e = 1{,}51$.

Continuación

EDT, etilendiaminotartrato $C_6H_{14}H_2O_6$, 2

$\rho = 1{,}538$ *g/cm³*

d, 10^{-8} unid CGSE	*s*, 10^{-12} unid. CGSE		*α*, 10^{-6} grad^{-1}
$d_{14} = -30{,}4$	$s_{11} = 3{,}34$	$s_{25} = 15{,}0$	$\alpha_1 = 0$
$d_{16} = -36{,}6$	$s_{12} = -0{,}3$	$s_{33} = 10{,}8$	$\alpha_2 = 20{,}3$
$d_{21} = 30{,}3$	$s_{13} = -3{,}0$	$s_{35} = -2{,}65$	$\alpha_3 = 80{,}0$
$d_{22} = 6{,}6$	$s_{15} = -1{,}7$	$s_{44} = 19{,}1$	$\alpha_5 = -32$
$d_{23} = -34$	$s_{22} = 3{,}65$	$s_{46} = 0{,}38$	
$d_{25} = -53{,}8$	$s_{23} = -1{,}8$	$s_{55} = 11{,}6$	
$d_{34} = -50{,}9$		$s_{66} = 19{,}1$	
$d_{36} = -55{,}1$			

Fluorita, CaF_2, $m3m$

$\rho = 3{,}18$ g/cm³,
$T_{fus} = 1360$ °C, $n = 1{,}43384$ para $\lambda = 5890$ Å,
$\pi_{11} = -0{,}29 \cdot 10^{-11}$ unid. CGSE,
$\pi_{12} = 1{,}16 \cdot 10^{-11}$ » »
$\pi_{44} = 0{,}698 \cdot 10^{-11}$ » »

Fosfuro de galio, GaP, $\bar{4}3m$

Para $\lambda = 0{,}54\mu$, $n = 3{,}495$,
$r_{41} = 1{,}5 \cdot 10^{-8}$ unid. CGSE.

Germanio, Ge, $m3m$

$\rho = 5{,}327$ g/cm³, $T_{fus} = 936$ °C

s, 10^{-12} unid. CGSE	*c*, 10^{11} unid. CGSE	Π_{ij}, 10^{-12} unid. CGSE		ρ, ohm·cm	
		n-Ge	*p*-Ge	*n*-Ge	*p*-Ge
$s_{11} = 0{,}979$	$c_{11} = 13{,}114$	$\Pi_{11} = -4{,}7$	$\Pi_{11} = -3{,}7$	9,9	1,1
$s_{12} = -0{,}267$	$c_{12} = 4{,}924$	$\Pi_{12} = -5{,}0$	$\Pi_{12} = 3{,}2$		
$s_{44} = -1{,}497$	$c_{44} = 6{,}816$	$\Pi_{44} = -137{,}9$	$\Pi_{44} = 96{,}7$		

Para $\lambda = 16\mu$, $n = 4{,}0012$.

Grafito, C, $6/mmm$

$\rho = 2{,}21$ g/cm³, $T_{fus} = 3800 - 3900$ °C,
$\alpha_1 = \alpha_2 = -1{,}5 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}, $\alpha_3 = +28{,}2 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}.

Continuación

Granate ferro-ítrico, YFe, $m3m$

$\rho = 5{,}17$ g/cm^3,
Para $\lambda = 1{,}15\mu$, $n = 2{,}22$,
$p_{11} = 0{,}025$, $p_{12} = 0{,}073$, $p_{44} = 0{,}041$.

Greenockita, CdS, $6mm$

$\rho = 4{,}82$ g/cm^3, $T_{fus} = 1500$ °C a la presión de 100 at.
Para $\lambda = 0{,}515\mu$,
$n_o = 2{,}743$, $n_e = 2{,}726$,
$r_{13} = 3{,}3 \cdot 10^{-8}$ unid. CGSE, $r_{33} = 7{,}2 \cdot 10^{-8}$ unid. CGSE,
$r_{51} = 11{,}1 \cdot 10^{-8}$ *unid. CGSE.*

KDP, dihidrofosfato de potasio, KH_2PO_4, $\bar{4}2m$

Ferroeléctrico, $T_C = -151$ °C. En el punto de Curie $P^s = 10^4$ unid. CGSE,
$\varepsilon_3 = 7 \cdot 10^4$, $\gamma_3 = 5000$ unid. CGSE,
$\rho = 2{,}338$ g/cm^3, $T_{fus} = 252$ °C, $c_p = 0{,}1$ cal$\cdot$g^{-1} grad^{-1},
$n_o = 1{,}511$, $n_e = 1{,}469$ para $\lambda = 5460$ Å,
$r_{41} = +25 \cdot 10^{-8}$ unid. CGSE,
$r_{63} = -30 \cdot 10^{-8}$ unid. CGSE para $\lambda = 5460$ Å,
$\pi_{66} = 0{,}5 \cdot 10^{-12}$ unid. CGSE para $\lambda = 5350$ Å

d, 10^{-8} unid. CGSE	s, 10^{-12} unid. CGSE	c, 10^{10} unid. CGSE	ε	α, 10^{-6} grad^{-1}
$d_{14} = 4{,}2$ $d_{36} = 69{,}6$	$s_{11} = 1{,}65$ $s_{12} = -0{,}4$ $s_{13} = -0{,}75$ $s_{33} = 2{,}0$ $s_{44} = 7{,}9$ $s_{66} = 16{,}6$	$c_{11} = 86{,}8$ $c_{12} = 40{,}2$ $c_{13} = 47{,}6$ $c_{33} = 85{,}7$ $c_{44} = 12{,}7$ $c_{66} = 6{,}0$	$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 4{,}6$ $\varepsilon_3 = 21{,}8$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 36$ $\alpha_3 = 41{,}1$

KTN, Niobato tantalato de potasio, $KTa_xNb_{1-x}O_3$

Ferroeléctrico, $T_C = 10$ °C.
Más bajo de la T_C la simetría es de $4nm$, más arriba de T_C es de $m3m$.
Para $\lambda = 0{,}633\mu$, $n_o = 2{,}318$, $n_e = 2{,}277$
(en la fase tetragonal).

$$r_{33} - \left(\frac{n_1}{n_3}\right)^2 r_{13} = 15 \cdot 10^{-6} \text{ unid. CGSE},$$

$$r_{42} = 24 \cdot 10^{-6} \text{ unid. CGSE},$$

$$R_{11} - R_{12} = 9{,}67 \cdot 10^{-12} \text{ unid. CGSE}.$$

Continuación

Niobato de litio, $LiNbO_3$, $3m$

$\rho = 4{,}7$ g/cm^3, $T_{fus} = 1253$ °C,
$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 99{,}5$, $\varepsilon_3 = 38{,}5$,
$r_{22} = 0{,}1 \cdot 10^{-8}$ unid. CGSE, $r_{33} = 0{,}9 \cdot 10^{-8}$ unid. CGSE,
$r_{13} = 0{,}25 \cdot 10^{-8}$ » » , $r_{51} = 0{,}9 \cdot 10^{-8}$ unid. CGSE

para $\lambda = 5460$ Å,
$c_{11} = 204 \cdot 10^{10}$ unid. CGSE, $c_{44} = 74 \cdot 10^{10}$ unid. CGSE,
$c_{33} = 242 \cdot 10^{10}$ » » , $c_{66} = 64 \cdot 10^{10}$ » » .

Nitrito de bario, $Ba(NO_2)_2 \cdot H_2O$, 6

$\alpha_1 = \alpha_2 = 16 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}, $\alpha_3 = 76 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1},
$\gamma_3 = -8$ unid. CGSE,
$d_{31} = 5{,}3 \cdot 10^{-8}$ unid. CGSE, $d_{33} = 5{,}1 \cdot 10^{-8}$ unid. CGSE,
$c_{11} = 0{,}525 \cdot 10^{12}$ » » , $c_{33} = 0{,}3 \cdot 10^{12}$ » » ,
$c_{12} = 2{,}5 \cdot 10^{12}$ » » , $c_{13} = 0{,}15 \cdot 10^{12}$ » » .

Pironiobato de calcio, $Ca_2Nb_2O_7$, 2

Para $\lambda = 0{,}546\mu$, $n_1 = 1{,}97$, $n_2 = 2{,}16$, $n_3 = 2{,}17$,
$r_{22} = 0{,}99 \cdot 10^{-8}$ unid. CGSE,
$r_{32} = 41{,}1 \cdot 10^{-3}$ unid. CGSE.

RDP, dihidrofosfato de rubidio, RbH_2PO_4, $\bar{4}2m$

Para $\lambda = 0{,}547\mu$,
$n_o = 1{,}509$, $n_e = 1{,}479$,
$\Pi_{66} = 10{,}5 \cdot 10^{-12}$ cm^2/din.

Resorcina, $C_6H_4(OH_2)$, mm

$\rho = 1{,}272$ g/cm^3, $T_{fus} \sim 100$ °C

d, 10^{-8} unid. CGSE	s, 10^{-12} unid. CGSE	c, 10^{10} unid. CGSE	ε
$d_{15} = 53{,}9$	$s_{11} = 19$	$c_{11} = 10{,}3$	$\varepsilon_1 = 3{,}51$
$d_{31} = -12{,}4$	$s_{22} = 10{,}6$	$c_{22} = 14{,}4$	$\varepsilon_2 = 4{,}14$
$d_{33} = 16{,}8$	$s_{33} = 15$	$c_{33} = 12{,}9$	$\varepsilon_3 = 3{,}54$
$d_{24} = 55{,}3$	$s_{44} = 30{,}7$	$c_{44} = 3{,}3$	
$d_{32} = -12{,}8$	$s_{55} = 23$	$c_{55} = 4{,}4$	
	$s_{66} = 25$	$c_{66} = 4{,}0$	
	$s_{12} = -4$	$c_{12} = 6{,}2$	
	$s_{13} = -3{,}4$	$c_{13} = 7{,}4$	
	$s_{23} = -8{,}8$	$c_{23} = 6{,}9$	

Continuación

Rubí, α-Al_2O_3, $\bar{3}m$

(Se llaman rubí los cristales del corindón α-Al_2O_3, pintados de rojo debido a la presencia de la adición de Cr).

$n_o = 1{,}768$, $n_e = 1{,}759$ para $\lambda = 5890$ Å

s, 10^{-12} unid. CGSE	c, 10^{11} unid. CGSE	ε	α, 10^{-6} grad^{-1}
$s_{11} = 0{,}2353$	$c_{11} = 49{,}68$	$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 8{,}6$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 5{,}0$
$s_{33} = 0{,}2170$	$c_{33} = 49{,}81$	$\varepsilon_3 = 10{,}55$	$\alpha_3 = 6{,}66$
$s_{44} = 0{,}6940$	$c_{44} = 14{,}74$		
$s_{12} = -0{,}0716$	$c_{12} = 16{,}36$		
$s_{13} = -0{,}0364$	$c_{13} = 11{,}09$		
$s_{14} = 0{,}0489$	$c_{14} = -2{,}35$		

Para $\lambda = 0{,}63\mu$, $n_o = 2{,}20$,
$p_{31} = 0{,}178$, $p_{13} = 0{,}092$, $p_{33} = 0{,}088$,
$p_{41} = 0{,}115$, $p_{11} = 0{,}036$, $p_{13} = 0{,}072$.

Sal de roca, NaCl, $m3m$

$\rho = 2{,}2$ g/cm^3, $T_{fus} = 804$ °C,
$n = 1{,}51$ para $\lambda = 5890$ Å,
$\pi_{11} = +0{,}25 \cdot 10^{-11}$ unid. CGSE, $R_{11} = +2{,}7 \cdot 10^{-12}$ unid. CGSE,
$\pi_{12} = +1{,}46 \cdot 10^{-11}$ » » , $R_{12} = -1{,}35 \cdot 10^{-12}$ » » ,
$\pi_{14} = -0{,}85 \cdot 10^{-11}$ » » , $R_{44} = +0{,}9 \cdot 10^{-12}$ » » .

Sal de Seignette, $NaKC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$

Ferroeléctrico que tiene dos puntos de Curie: de -18 °C y de $+24$ °C. La simetría de fase ferroeléctrica es de 2, la de fase paramagnética, 222. Cerca del punto superior de Curie $\gamma_1 = 200$ unid. CGSE.

$\rho = 1{,}77$ g/cm^3, $T_{fus} = 55$ °C,
$n_g = 1{,}4954$, $n_m = 1{,}4920$,
$n_p = 1{,}4900$

d, g, 10^{-8} unid. CGSE	s, 10^{-12} unid. CGSE	c, 10^{10} unid. CGSE	ε	α, 10^{-6} grad^{-1}
$d_{14} = 1150$	$s_{11} = 5{,}2$	$c_{11} = 40$	$\varepsilon_1^t = 480$	$\alpha_1 = 58{,}3$
$d_{25} = -160$	$s_{12} = -2{,}1$	$c_{12} = -30$	$\varepsilon_2^t = 12$	$\alpha_2 = 35{,}5$
$d_{36} = 35$	$s_{13} = -2{,}0$	$c_{13} = -40$	$\varepsilon_3^t = 10$	$\alpha_3 = -136{,}1$
$g_{14} = 31$	$s_{22} = 3{,}4$	$c_{22} = 50$	$\varepsilon_1^r = 220$	
$g_{25} = -170$	$s_{23} = -1{,}3$	$c_{23} = -30$	$\varepsilon_2^r = 11$	
$g_{36} = 44$	$s_{33} = 3{,}2$	$c_{33} = 60$	$\varepsilon_3^r = 9{,}8$	
	$s_{44} = 20$	$c_{44} = 10$		
	$s_{55} = 32$	$c_{55} = 3$		
	$s_{66} = 10$	$c_{66} = 10$		

Continuación

Silicio, Si, $m3m$

$\rho = 2{,}328$ g/cm^3, $T_{fus} = 1410$ °C $c_p = 0{,}181$ cal·g^{-1}·grad^{-1}, $P_{máx} = 9{,}47$ kgf/mm^2, $\varepsilon = 12$

s, 10^{-12} unid. CGSE	c, 10^{10} unid. CGSE	Π_{ij}, 10^{-12} unid. CGSE		ρ, ohm·cm	
		n-Si	p-Si	n-Si	p-Si
$s_{11} = 0{,}768$ $s_{12} = -0{,}214$ $s_{44} = 1{,}256$	$c_{11} = 16{,}57$ $c_{12} = 6{,}39$ $c_{44} = 7{,}96$	$\Pi_{11} = -102{,}2$ $\Pi_{12} = 53{,}4$ $\Pi_{44} = -13{,}6$	$\Pi_{11} = 6{,}6$ $\Pi_{12} = -1{,}1$ $\Pi_{44} = 138{,}1$	11,7	78

Sulfato alumínico potásico, $KAl[SO_4]_2 \cdot 12H_2O$, $m3$

$\pi_{11} = 3{,}7 \cdot 10^{-11}$ unid. CGSE,
$\pi_{12} = 9{,}1 \cdot 10^{-11}$ » » ,
$\pi_{13} = 8{,}5 \cdot 10^{-11}$ » » ,
$\pi_{14} = -0{,}65 \cdot 10^{-11}$ » » .

Sulfato de litio, $Li_2SO_4 \cdot H_2O$, 2

$\rho = 2{,}06$ g/cm^3, $P_{máx} = 1{,}22$ kgf/mm^2, $\gamma_2 = 30$ unid. CGSE

d, 10^{-8} unid. CGSE	s, 10^{-12} unid. CGSE		ε
$d_{14} = 14{,}0$	$s_{11} = 2{,}39$,	$s_{12} = -0{,}95$	$\varepsilon_1^f = 5{,}6$
$d_{16} = -12{,}5$	$s_{22} = 2{,}13$,	$s_{13} = -0{,}5$	$\varepsilon_2^f = 6{,}5$
$d_{21} = 11{,}6$	$s_{33} = 2{,}31$,	$s_{23} = -0{,}36$	$\varepsilon_3^f = 10{,}3$
$d_{22} = 45{,}0$	$s_{44} = 3{,}69$,	$s_{15} = 0{,}71$	$\varepsilon_5^f = 0{,}07$
$d_{23} = -5{,}5$	$s_{55} = 4{,}1$,	$s_{25} = -1{,}2$	
$d_{25} = 16{,}5$		$s_{35} = 0{,}05$	
$d_{34} = -26{,}4$		$s_{46} = -0{,}41$	
$d_{36} = 10{,}0$		$s_{66} = 7{,}40$	

Sulfuro de cadmio, CdS, $6mm$

$\rho = 4{,}82$ g/cm^3

d, 10^{-8} unid. CGSE	s, 10^{-12} unid. CGSE	c, 10^{11} unid. CGSE	ε	α, 10^{-6} grad^{-1}
$d_{31} = -1{,}7$	$s_{11} = 2{,}22$	$c_{11} = 8{,}1$	$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 9{,}3$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 5{,}0$
$d_{33} = 3{,}4$	$s_{12} = -0{,}87$	$c_{12} = 4{,}9$	$\varepsilon_3 = 10{,}3$	$\alpha_3 = 3{,}5$
$d_{15} = -4{,}7$	$s_{13} = -0{,}80$	$c_{13} = 4{,}8$		
	$s_{33} = 2{,}19$	$c_{33} = 8{,}0$		
	$s_{44} = 7{,}0$	$c_{44} = 1{,}43$		

Continuación

Sulfuro de zinc, ZnS

Esfalerita, $\bar{4}3m$

(modificación cúbica de ZnS)

$\rho = 4{,}102$ g/cm³, $n = 2{,}37$ para $\lambda = 5460$ Å, $\varepsilon = 8{,}37$,
$d_{14} = 9{,}54 \cdot 10^{-8}$ unid. CGSE, $s_{11} = 18{,}39 \cdot 10^{-13}$ unid. CGSE,
$s_{12} = -7{,}07 \cdot 10^{-13}$ unid. CGSE, $s_{44} = 21{,}69 \cdot 10^{-13}$ unid. CGSE,
$r_{41} = 5{,}0 \cdot 10^{-8}$ unid. CGSE para $\lambda = 5460$ Å.

Wurtzita, $6mm$, (modificación hexagonal de ZnS)

Tantalato de litio, $LiTaO_3$, $3m$

Ferroeléctrico, $T_C = 617$ °C.
Para $\lambda = 0{,}633\mu$, $n_o = 2{,}176$,
$n_e = 2{,}180$,
$r_{13} = 21 \cdot 10^{-8}$ unid. CGSE, $r_{33} = 90{,}9 \cdot 10^{-8}$ unid. CGSE,
$r_{51} = 60 \cdot 10^{-8}$ unid. CGSE, $r_{22} = 3 \cdot 10^{-8}$ unid. CGSE.

Tartrato de potasio, $C_4H_4O_6$ [2]

$\rho = 1{,}988$ g/cm³,
$\gamma_2 = -4{,}9$ unid. CGSE

d, 10^{-8} unid. CGSE	s, 10^{-13} unid. CGSE		ε	α, 10^{-6} grad^{-1}
$d_{14} = -25{,}0$	$s_{11} = +2{,}24$,	$s_{33} = +3{,}86$	$\varepsilon_1 = 6{,}44$	$\alpha_1 = +12{,}0$
$d_{16} = +6{,}5$	$s_{12} = -0{,}08$,	$s_{35} = +0{,}90$	$\varepsilon_2 = 5{,}80$	$\alpha_2 = +44{,}8$
$d_{21} = -2{,}2$	$s_{13} = -1{,}64$,	$s_{44} = +11{,}90$	$\varepsilon_3 = 6{,}49$	$\alpha_3 = +32{,}0$
$d_{22} = 8{,}5$	$s_{15} = -0{,}64$,	$s_{46} = +0{,}57$	$\varepsilon_5 = 0{,}005$	$\alpha_5 = -12{,}0$
$d_{23} = -10{,}4$	$s_{22} = +3{,}37$,	$s_{55} = +8{,}15$		
$d_{25} = -22{,}5$	$s_{23} = -1{,}05$,	$s_{66} = +10{,}41$		
$d_{34} = +29{,}4$	$s_{25} = -0{,}57$,			
$d_{36} = -66{,}0$				

Telururo de plomo, PbTe, $m3m$

$\rho = 8{,}16$ g/cm³, $T_{fus} = 917$ °C

s, 10^{-13} unid. CGSE	Π, 10^{-13} unid. CGSE		ρ, ohm·cm	
	n-PbTe	p-PbTe	n-PbTe	p-PbTe
$s_{11} = 0{,}947$	$\Pi_{11} = 20$	$\Pi_{11} = 35$	1—3	1—3
$s_{12} = -0{,}073$	$\Pi_{12} = 25$	$\Pi_{12} = 40$		
$s_{44} = 7{,}63$	$\Pi_{44} = -107$	$\Pi_{44} = 185$		

Continuación

TGS, triglicinosulfato

Ferroeléctrico, $T_C = 49$ °C.

La simetría de la fase ferroeléctrica es de 2, la de fase paramagnética es de $2/m$. Cerca del punto de Curie $\gamma_2 = 500$ unid. CGSE, $\varepsilon_2 = 200$.

Titanato de bario, $BaTiO_3$

$\rho = 5{,}9$ g/cm³, $T_{fus} = 1625$ °C.

A más de 120 °C tiene la simetría de $m3m$. Entre 120 °C y 5 °C es estable la fase tetragonal con la simetría de $4mm$. La dirección de la polarización espontánea es paralela a ⟨100⟩ de la célula cúbica inicial. A menos de 5 °C surge una nueva fase ferroeléctrica, la dirección de la polarización espontánea en este caso es paralela a ⟨110⟩ de la célula cúbica inicial. La simetría de esta fase es mm, estable entre 5 °C y —90 °C.

A —90 °C se observa la tercera transición de fase, la dirección de la polarización espontánea es paralela a ⟨111⟩ de la célula cúbica inicial. La simetría de esta fase es de $3m$.

Para la modificación cúbica: $n = 2{,}4$, $R_{11} = R_{18} = 1{,}44 \cdot 10^{-12}$ unid. CGSE, $R_{33} = 1{,}88 \cdot 10^{-12}$ unid. CGSE.

Turmalina, $3m$

$\rho \approx 2{,}90 - 3{,}25$ g/cm³, $T_{fus} = 1102$ °C,
$c_p = 0{,}2$ cal·g^{-1} grad^{-1}, $\gamma_3 = 1{,}3$ unid. CGSE

d, 10^{-8} unid. CGSE	s, 10^{-12} unid. CGSE	c, 10^{10} unid CGSE	ε	α, 10^{-6} grad^{-1}
$d_{15} = 10{,}9^*$ $d_{22} = 1{,}0$ $d_{31} = 1{,}03$ $d_{33} = 5{,}5$	$s_{11} = 0{,}385$ $s_{12} = 0{,}048$ $s_{13} = 0{,}071$ $s_{33} = 0{,}636$ $s_{44} = 154$ $s_{14} = 0{,}045$	$c_{11} = 272$ $c_{12} = 40$ $c_{13} = 35$ $c_{33} = 165$ $c_{44} = 65$ $c_{14} = -6{,}8$	$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 8{,}2$ $\varepsilon_3 = 7{,}5$	$\alpha_1 = \alpha_2 = -3{,}6$ $\alpha_3 = -8{,}8$

Explicación de símbolos

ρ—densidad; T_{fus}—temperatura de fusión; c_p—capacidad calorífica a una presión constante; T_C—temperatura de Curie; $P_{máx}$—magnitud de la tensión mecánica límite; n—índice de refracción; γ—coeficiente piroeléctrico; ε—permeabilidades dieléctricas relativas; ε^f—permeabilidad dieléctrica del cristal mecánicamente libre, medida a las tensiones iguales a cero; ε^r—permeabilidad dieléctrica del cristal «apretado», medida cuando las deformaciones del cristal son iguales a cero; ρ_i—coeficientes de resistencia específica; α_i—coeficientes de dilatación térmica; d_{ij}—módulos piezoeléctricos; e_{ij}, h_{ij}, g_{ij}—constantes piezoeléctricas; r_{ij}—coeficientes del efecto lineal electroóptico; s_{ij}—compresibilidades elásticas; c_{ij}—rigideces elásticas; π_{kl}—coeficientes piezoópticos; p_{kl}—coeficientes elastoópticos; R_{kl}—coeficientes del efecto cuadrático electroóptico.

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS

3.8. a) $\sigma = 36$ unid. CGSE; b) $\sigma = 18$ unid. CGSE; c) $\sigma = 0$.
3.9. $\Delta T = 5{,}7 \cdot 10^{-7}$ grad^{-1}. La lámina debe ser cortada perpendicularmente al eje 2. 3.10. ~ 750 V/cm.
3.12. El punto inferior de Curie se desplazará en 1,4° hacia las temperaturas más altas, si el campo **E** coincide en su dirección con $\mathbf{P}^s$. Si **E** es opuesto a $\mathbf{P}^s$, el punto inferior de Curie se desplazará en el mismo valor hacia las temperaturas bajas.
3.13. $\gamma \sim 6 \cdot 10^4$ unid. CGSE. 3.15. En las clases 1 y m. 3.16. $\Delta T = 10^{-4}$ grad. 3.17. $Q = 4{,}8 \cdot 10^{-7}$ C. 4.10. $36 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}. 4.11. 4,55; 4,50. 4.12. $\varepsilon^t = 167$; $\varepsilon^r = 80{,}3$. 4.13. $1{,}7 \cdot 10^6$ ohm·cm. 4.14. a) 0,221; 0,221; 0,217; b) 0,219; c) 0,221. 4.15. $C = 1{,}4 \cdot 10^{-12}$ F.
4.17. a) y b)

$$\varepsilon'_{ij} = \begin{bmatrix} 4{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 4{,}52 & -0{,}04 \\ 0 & -0{,}04 & 4{,}57 \end{bmatrix};$$

c) no cambia.
4.21. $\theta = 64{,}7°$.
4.22. En las direcciones que forman el ángulo de 86°50′ con el eje de orden superior.
4.23. Perpendicularmente a la dirección de [001].
4.24. Los ejes principales del tensor $[\alpha_{ij}]$ están enlazados con los ejes iniciales por medio del giro alrededor del eje X_2 en 20,7° en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.
4.26. 0,003. 4.27. 0,027 mm. 4.28. 0,014 mm.
4.29. El cristal es ópticamente negativo. La birrefringencia máxima es de 0,007.
4.30. El cristal es ópticamente negativo.
4.31. 0,046 mm. 4.32. 0,0136 mm. 4.33. 0,007 mm. 4.34. 0,029 mm. 4.35. 0,012 mm. 4.36. 0,07 mm.
4.37. $n_o = 1{,}658$; $n'_e = 1{,}566$; $\Delta = 0{,}184$ mm.
5.9. El sistema de coordenadas buscado está enlazado con los ejes iniciales del tensor mediante el giro de 45° alrededor del eje X_3 en el sentido contrario al movimiento de las agujas de reloj.
5.10. $t_n = t_{11} \cos^2\alpha + t_{22} \operatorname{sen}^2\alpha + t_{12} \operatorname{sen} 2\alpha$;

$$t_t = \frac{1}{2}(t_{22} - t_{11}) \operatorname{sen} 2\alpha + t_{12} \cos 2\alpha.$$

5.11. $t_1 = 99{,}3$ kgf/cm^2; $t_2 = 58{,}8$ kgf/cm^2; $t_3 = -138$ kgf/cm^2; $t_t = 118{,}6$ kgf/cm^2.
5.12. $p_{\text{med}} = -70$ kgf/cm^2; $t_{t\ \text{máx}} = 75$ kgf/cm^2.
5.13.

$$r_{ij} = \begin{bmatrix} 8 & 5 & -2 \\ 5 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5}; \quad [\omega_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & -6 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5};$$

$$\Delta V/V = 12 \cdot 10^{-5}.$$

5.16. $\mathbf{n}_1$ (0,8945; 0; —0,4470); $\mathbf{n}_2$ (0, 1, 0): $\mathbf{n}_3 = (0{,}4470;\ 0{,}8945)$.
5.18. $8\cdot10^{-6}$; $5{,}33\cdot10^{-6}$; $8{,}67\cdot10^{-6}$. 5.19. $\varphi = 2\Delta T\sqrt{\alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2}$.

5.20. $$\frac{x_1^2}{(1+\alpha_{11}\Delta t)} + \frac{x_2^2}{(1+\alpha_{22}\Delta t)} + \frac{x_3^2}{(1+\alpha_{33}\Delta t)} = 1.$$

6.9. $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d_{14} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}d_{36} & -\frac{1}{2}d_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.15. Las láminas de la sección Y de sulfato de litio y de tartrato de potasio son, aproximadamente, cuatro veces más sensibles que la lámina de turmalina de la sección Z.

6.16. a) Para el cuarzo $P_{\parallel} = n_1\,(n_1^2 - 3n_2^2)\,d_{11}t$; el efecto longitudinal es imposible en la dirección de [0001]. b) Para el clorato de sodio $P_{\parallel} = 3n_1n_2n_3d_{14}t$; *el efecto longitudinal es imposible en las direcciones* que se encuentran en los planos coordenados, es decir, en las direcciones del tipo $[hk0]$.

6.17. $Q = Fd_{11}$; $Q = -d_{11}F\cdot\frac{b}{a}$; $Q = 0$.

6.19. $r_2' = -1{,}9\cdot10^{-5}$; $r_3' = -r_2'$. 6.21. $r_4 = r_5 = 0{,}248\cdot10^{-6}$.
6.22. $\Delta x_1 = -6{,}7\cdot10^{-7}$ cm; $\Delta x_2 = 3{,}38\cdot10^{-5}$ cm.
6.25. $d_{12}' = -d_{11}\cos^2\varphi + d_{14}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi$; siendo $\varphi = 0°$, $d_{12}' = -d_{11}$; cuando $\varphi = 90°$, $d_{12}' = 0$. 6.26. $r = n_1\,(n_1^2 - 3n_2^2)\,d_{11}$.
6.28. El vector unitario de la normal a la lámina en el sistema de coordenadas cristalofísico se dará por las componentes $n_1 = n_2 = n_3 = 0{,}5774$. 6.29. Bajo el ángulo de 45°.
6.30. 10^3 at. 6.31. $Q_1 = d_{14}n_2n_3tbc$; $Q_2 = d_{14}n_1n_3tac$; $Q_3 = 0$.
6.32. $Q = 1{,}4\cdot10^{-5}$ C, $V = 45$ V. 6.33. $c/a = 1{,}001$. 6.34. El ángulo monoclínico es de $90°2'$. 6.35. $k = 3\%$.
6.36. El desplazamiento del borde de la lámina es, aproximadamente, de 10^{-6} mm.
6.41. d_{14}. 6.42. a) En todas las caras $\sigma = 0$; b) en la cara perpendicular a la dirección de [001], $\sigma = d_{14}t/2$; en las demás $\sigma = 0$; c) en todas las caras $\sigma = d_{14}t/3$.
6.44. $d = 0{,}095$ mm para el cuarzo; $d = 0{,}124$ mm para la turmalina.
6.45. $k = 10\%$; $k = 9\%$.
6.46. $d_{33} = 5{,}73\cdot10^{-6}$, $d_{31} = -2{,}35\cdot10^{-6}$, $d_{15} = 7{,}8\cdot10^{-6}$ (en unidades de CGSE). 6.47. $d_{14} = 9{,}52\cdot10^{-8}$ unid. CGSE.

6.48. $P^s = \dfrac{2d_{31} + d_{33}}{s_{33} - 2s_{11} - 2s_{12}}$ para la turmalina;

$$P^s = \frac{d_{21} + d_{22} + d_{23}}{s_{22} - s_{11} - s_{33} - 2s_{13}}$$ para el sulfato de litio.

6.51. $\gamma_3^{\sigma} = 0{,}95$ unid. CGSE. 7.10. $1{,}82\cdot10^{-4}$. 7.11. En 4°.
7.12. $t_1 = t_2 = 18$ kgf/cm²; $t_3 = 14{,}6$ kgf/cm²; $t_4 = t_5 = 1{,}73$ kgf/cm²; $t_6 = 1{,}2$ kgf/cm².
7.13. $1{,}026\cdot10^{-8}$ cm³/din; $2{,}67\cdot10^{-12}$ cm³/din.
7.14. $5{,}52\cdot10^{11}$ din/cm²; $2{,}08\cdot10^{11}$ din/cm²; $1{,}95\cdot10^{11}$ din/cm².
7.15. $s_{33}' = \dfrac{1}{E} = s_{11}\ (1 - \cos^2\theta_3)^2 + (s_{44} + 2s_{13})\cos^2\theta_3 \times$

$\times (1 - \cos^2\theta_3) + s_{33}\cos^4\theta_3 + 2s_{14}\cos\theta_3\cos\theta_3(3\cos^2\theta_1 - \cos^2\theta_3)$, donde θ_1, θ_2 y θ_3 son los ángulos entre la dirección arbitraria X_3' y los ejes cristalofísicos.

7.16. $s_{33}' = s_{11}\,\text{sen}^4\,\theta + s_{33}\cos^4\theta + (s_{44} + 2s_{13})\,\text{sen}^2\,\theta\cos^2\theta$, donde θ es el ángulo entre la dirección arbitraria X_3' y el eje de orden superior.

7.17. 1200 erg. 7.18. 3320 erg. 7.23. s_{33} y s_{13}. 7.25. s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{33}. 7.26. s_{13} y s_{33}.

7.27. $s_{11} = 2{,}34\cdot10^{-12}$, $s_{12} = -0{,}515\cdot10^{-12}$, $s_{44} = 8{,}54\cdot10^{-12}$ (en cm^2/din).

8.8. El efecto longitudinal es igual a cero, el transversal es igual a $\frac{1}{2}n_0^3(\pi_{11} - \pi_{12})t$.

8.9. Las clases que pertenecen a las singonías triclínica y monoclínica.

8.10. $\pi_{44} = 0{,}706\cdot10^{-11}$ cm^2/din.

8.11. $\Delta n_{[010]} = -\frac{1}{2}n_0^3(\pi_{11} - \pi_{12})\,t$; $\Delta n_{[001]} = -\frac{1}{2}n_0^3 \times$ $\times(\pi_{11} - \pi_{13})\,t$.

8.12. $n_1' = n_0 - \frac{\pi_{11}t_1}{2}n_0^3$; $n_2' = n_0 - \frac{\pi_{12}t_1}{2}n_0^3$; $n_3' = n_e - \frac{\pi_{31}t_1}{2}n_e^3$.

8.13. $-\frac{1}{2}(n_0)^3(\pi_{11} - \pi_{12})\,t$; el cristal llega a ser uniaxial, ópticamente negativo.

8.14. $\approx 8{,}8$ kgf/cm^2.

8.17. π_{11}, π_{12}; π_{31}.

8.19. $1{,}65\cdot10^{-4}$.

8.20. 8,8 kgf/cm^2 para ADP; 22,8 kgf/cm^2 para DKDP.

9.11. La primera lámina se comportará como una lámina del cristal biaxial, la segunda, como la del cristal uniaxial.

9.12. Es imposible.

9.15. $5\cdot10^{-8}$ unid. CGSE.

9.17. $n_1' = n_1$; $\dfrac{1}{n_2'^2} = \dfrac{1}{n_2^2} + \dfrac{r_{41}^2E_1^2}{\dfrac{1}{n_2^2} - \dfrac{1}{n_3^2}}$;

$$\frac{1}{n_3'^2} = \frac{1}{n_3^2} - \frac{r_{41}^2E_1^2}{\dfrac{1}{n_2^2} - \dfrac{1}{n_3^2}}.$$

El giro de la indicatriz óptica se realiza alrededor del eje X_1 en el plano X_2X_3 en el ángulo $\varphi = \dfrac{r_{41}E_1}{\dfrac{1}{n_2^2} - \dfrac{1}{n_3^2}}$.

9.18. $\sim$0,4 cm. 9.19. $\sim 27{,}8\cdot10^{-8}$ unid. CGSE. 9.20. R_{44}. 9.21. 0,2 cm. 9.22. $\sim$ 25 kV.

9.23. Para la sección Z de KDP $V_{\lambda/2} = 7{,}9$ kV. Para la sección Z de DKDP $V_{2/\lambda} = 3{,}4$ kV.

9.26. $\bar{4}$, $\bar{4}2$ m.

9.27. Es imposible.

9.28. Los cristales tienen la simetría de 422, 32, 622, $\bar{3}m$ y $\bar{6}m2$.

9.29. $\approx$660 veces para KDP y $\approx$500 veces para DKDP.

9.30. $B_{[100]} = \frac{1}{2} P^s (n_3^2 m_{33} - n_2^2 m_{23})$,

$B_{[010]} = \frac{1}{2} P^s (n_3^2 m_{33} - n_1^2 m_{13})$,

$B_{[001]} = \frac{1}{2} P^s (n_2^2 m_{23} - n_1^2 m_{13})$.

9.31. r_{13}. 9.34. 0,2 cm. 9.35. 12,3 kV. 9.36. $\sim 16'$.
9.37. $m_{33} = 1{,}87 \cdot 10^{-7}$ unid. CGSE. 9.38. $n_{x_1'} = n_1$,

$$\frac{1}{n_{x_2'}} = \frac{1}{n_2^2} + \frac{r_{41}^2 E_1^2}{1/n_2^2 - 1/n_3^2},$$

$$\frac{1}{n_{x_3'}} = \frac{1}{n_3^2} - \frac{r_{41}^2 E_1^2}{1/n_2^2 - 1/n_3^2}.$$

9.39. $\sim 0{,}4$ cm.
9.40. $\sim 27{,}8 \cdot 10^{-8}$ unid. CGSE.
9.42. $n_{x_1'} = n_{x_2'} = n_o + \frac{1}{2\sqrt{3}} n_o^3 r_{41} E$,

$$n_{x_3'} = n_o - \frac{1}{2\sqrt{3}} n_o^3 r_{41} E; \quad \Gamma = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \lambda n_o^3 r_{41} E l.$$

9.43. $r_{42} = 24 \cdot 10^{-6}$ unid. CGSE.
9.44. $V_{\lambda/2} \approx 15{,}6$ kV para KDP, $V_{\lambda/2} \approx 6{,}7$ kV para DKDP.
10.11. 20 kgf/cm^2.
10.12. a) $-80 \cdot 10^{-12}$ cm^2/din. b) $42{,}4 \cdot 10^{-12}$ cm^2/din.
10.13. $2{,}6 \cdot 10^{-10}$.
10.14. $\Pi_{11} = -4{,}7 \cdot 10^{-12}$ cm^2/din. $\Pi_{12} = -5 \cdot 10^{-12}$ cm^2/din. $\Pi_{44} = -137{,}9 \cdot 10^{-12}$ cm^2/din.
10.15. a) 0,002 V. b) 0,525 V.
10.16. $p \approx 100$ at.
10.17. a) 14 veces. b) 1,3 veces.
10.18. Para p-Ge:
$96{,}7 \cdot 10^{-12}$ cm^2/din $\geqslant \Pi_{44} \geqslant -0{,}5 \cdot 10^{-12}$ cm^2/din.
10.19. Para p-Ge:
$144 \geqslant K \geqslant 8{,}58$.
Para p-Si:

$$66{,}02 \geqslant K \geqslant -3{,}78.$$

10.21. $t = 0{,}14$ g/cm^2.
10.22. a) 0,3 V. b) $6{,}4 \cdot 10^{-4}$ V.
10.25. $133 \geqslant K \geqslant 13$.
10.27. ≈ 100 veces.

Definición de las magnitudes empleadas, sus dimensiones y unidades

Denominación de la magnitud	Símbolo	Denominación y definición en unidades	Factores de conversión	Denominación y definición en las unidades de SI
Fuerza	F	dina	10^{-5}	newton (N)
Potencial eléctrico	V	CGSE unidad de potencial	300	voltio (V)
Carga eléctrica	Q	CGSE unidad de carga	$3{,}33 \cdot 10^{-10}$	culombio (C)
Intensidad del campo eléctrico	E	CGSE unidad de intensidad	$3 \cdot 10^{4}$	voltio/metro (V/m)
Inducción eléctrica	D	$\frac{4\pi \text{ (CGSE unid. de carga)}}{\text{cm}^2}$	$2{,}65 \cdot 10^{-7}$	culombio/metro cuadrado (C/m^2)
Capacidad eléctrica	C	cm	$1{,}11 \cdot 10^{-12}$	faradio (F)
Coeficiente piroeléctrico	γ	$\frac{\text{CGSE unid. de carga}}{\text{cm}^2 \text{ grad}}$	$3{,}33 \cdot 10^{-5}$	$\frac{\text{culombio}}{\text{metro cuadr.grad}}$ $\left(\frac{\text{C}}{\text{m}^2 \text{ grad}}\right)$
Permeabilidad dieléctrica	ε	cm/cm	$8{,}85 \cdot 10^{-12}$	faradio/metro (F/m)
Tensión mecánica	t	din/cm^2	10^{-1}	$\frac{\text{newton}}{\text{metro cuadr.}}$ (N/m^2)
Deformación mecánica	r	cm/cm	1	$\frac{\text{metro}}{\text{metro}}$ (m/m)

Continuación

Denominación de la magnitud	Símbolo	Denominación y definición en unidades	Factores de conversión	Denominación y definición en las unidades de SI
Coeficientes de compresibilidad elástica	s	cm^2/din	10	$\frac{\text{metro cuadr.}}{\text{newton}}$ (m^2/N)
Coeficientes de rigidez elástica	c	din/cm^2	10^{-1}	$\frac{\text{newton}}{\text{metro cuadr.}}$ (N/m^2)
Módulo piezoeléctrico	d	$\frac{\text{CGSE unid. de carga}}{\text{din}}$	$3{,}33 \cdot 10^{-5}$	$\frac{\text{culombio}}{\text{newton}}$ (C/N)
Coeficiente piezoeléctrico	l	$\frac{\text{CGSE unid. de carga}}{cm^2}$	$3{,}33 \cdot 10^{-6}$	$\frac{\text{culombio}}{\text{metro cuadr.}}$ (C/m^2)
Coeficiente piezoeléctrico	g	$\frac{cm^2}{\text{CGSE unid. de carga}}$	$3 \cdot 10^5$	$\frac{\text{metro cuadr.}}{\text{culombio } (m^2/C)}$
Coeficiente piezoeléctrico	h	$\frac{\text{din}}{\text{CGSE unid. de carga}}$	$3 \cdot 10^4$	$\frac{\text{newton}}{\text{culombio}}$ (N/C)
Coeficiente piezorresistivo	Π	cm^2/din	10	$\frac{\text{metro cuadr.}}{\text{newton}}$ (m^2/N)

INDICE

Prefacio 5
§ 1. Expresión matricial de las operaciones simétricas y clases de simetría 7
§ 2. Principio de Neumann. Grupos puntuales límites de simetría. Principio de Curie 17
§ 3. Propiedades físicas de los cristales, que se describen con el tensor de primer rango 32
§ 4. Propiedades físicas de los cristales, que se describen con el tensor de segundo rango 43
§ 5. Tensiones y deformaciones en los cristales. Expansión térmica 73
§ 6. Propiedades piezoeléctricas de cristales 94
§ 7. Propiedades elásticas de cristales. La ley de Hooke . . . 124
§ 8. Propiedades piezoópticas de los cristales 149
§ 9. Propiedades electroópticas de los cristales. Efecto] electroóptico lineal y cuadrático 162
§ 10. Efecto piezorresistivo (tensorresistivo) en los cristales semiconductores 193
Tablas 216
Respuestas a los problemas 250
Definición de las magnitudes empleadas, sus dimensiones y unidades 254